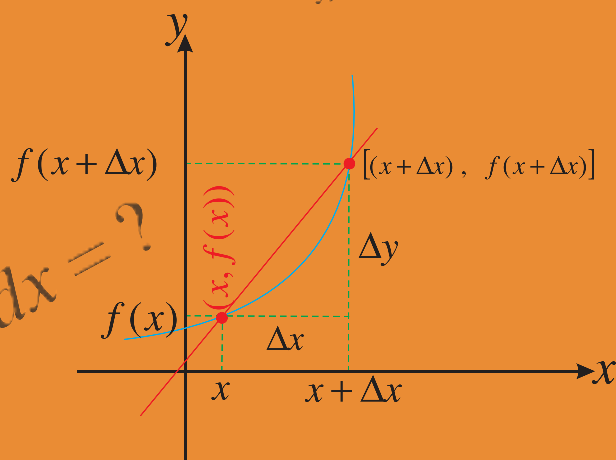



د پوهنې وزارت

# رياضي ۱۲

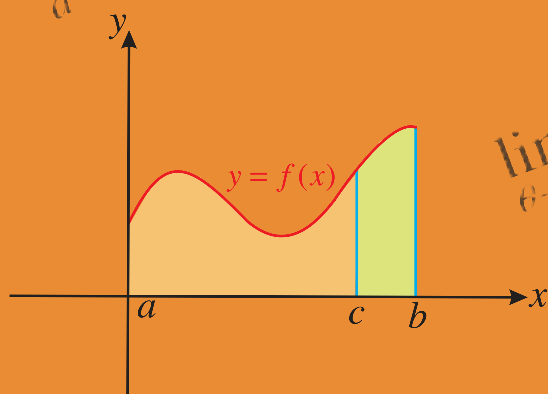
## ټولګی

$$\lim_{x \to a} f(x) = ?$$



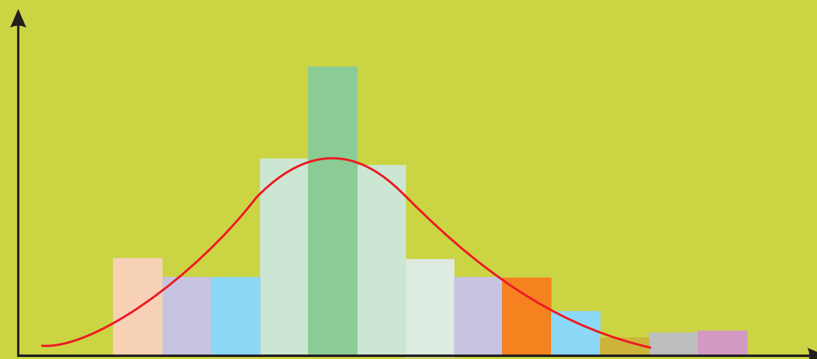

$$\int_a^b f(x)\,dx = ?$$

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = ?$$




د چاپ کال: ۱۳۹۸

رياضي ۱۲ ټولګی





# ملي سرود

دا وطن افغانستان دی
کور د سولې کور د تورې
دا وطن د ټولو کور دی
د پښتون او هزاره وو
ورسره عرب، گوجر دي
براهوي دي، قزلباش دي
دا هیواد به تل ځلیږي
په سینه کې د آسیا به
نوم د حق مو دی رهبر

دا عزت د هر افغان دی
هر بچی یې قهرمان دی
د بلوڅو د ازبکو
د ترکمنو د تاجکو
پامیریان، نورستانیان
هم ایماق، هم پشه یان
لکه لمر پر شنه آسمان
لکه زړه وي جاویدان
وایو الله اکبر وایو الله اکبر

بسم الله الرحمن الرحيم




د پوهنې وزارت

# رياضي ۱۲

## ټولګی

د چاپ کال: ۱۳۹۸ هــ . ش.



# د کتاب ځانګړتیاوې

---

**مضمون:** ریاضي

**مؤلفین:** د تعلیمي نصاب د ریاضیاتو د څانګې علمي او مسلکي غړي

**اډیټ کوونکي:** د پښتو ژبې د اډیټ علمي او مسلکي غړي

**ټولګی:** دولسم

**د متن ژبه:** پښتو

**انکشاف ورکوونکی:** د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تألیف لوی ریاست

**خپروونکی:** د پوهنې وزارت د اړیکو او عامه پوهاوي ریاست

**د چاپ کال:** ۱۳۹۸ هجري شمسي

**د چاپ ځای:** کابل

**چاپخونه:**

**برېښنالیک پته:** curriculum@moe.gov.af

---





## د پوهنې د وزیر پیغام

اقرأ باسم ربک

د لوی او ښښونکي خدای ﷻ شکر په ځای کوو، چې موږ ته یې ژوند رابښلی، او د لوست او لیک له نعمت څخه یې برخمن کړي یو، او د الله تعالی پر وروستي پیغمبر محمد مصطفی ﷺ چې الهي لومړنی پیغام ورته (لوستل) و، درود وایو.

څرنگه چې ټولو ته ښکاره ده ۱۳۹۷ هجري لمریز کال د پوهنې د کال په نامه ونومول شو، له دې امله به د گران هېواد ښوونیز نظام، د ژورو بدلونونو شاهد وي. ښوونکی، زده‌کوونکی، کتاب، ښوونځی، اداره او د والدینو شوراگانې د هېواد د پوهنیز نظام شپږگوني بنسټیز عناصر بلل کیږي، چې د هېواد د ښوونې او روزنې په پراختیا او پرمختیا کې مهم رول لري. په داسې مهم وخت کې د افغانستان د پوهنې وزارت د مشرتابه مقام، د هېواد په ښوونیز نظام کې د ودې او پراختیا په لور بنسټیزو بدلونونو ته ژمن دی.

له همدې امله د ښوونیز نصاب اصلاح او پراختیا، د پوهنې وزارت له مهمو لومړیتوبونو څخه دي. همدارنگه په ښوونځیو، مدرسو او ټولو دولتي او خصوصي ښوونیزو تأسیساتو کې، د درسي کتابونو محتوا، کیفیت او توزیع ته پاملرنه د پوهنې وزارت د چارو په سر کې ځای لري. موږ په دې باور یو، چې د باکیفیته درسي کتابونو له شتون پرته، د ښوونې او روزنې اساسي اهدافو ته رسېدلی نشو.

پورتنیو موخو ته د رسېدو او د اغېزناک ښوونیز نظام د رامنځته کولو لپاره، د راتلونکي نسل د روزونکو په توگه، د هېواد له ټولو زړه سواندو ښوونکو، استادانو او مسلکي مدیرانو څخه په درناوي هیله کوم، چې د هېواد بچیانو ته دې د درسي کتابونو په تدریس، او د محتوا په لېږدولو کې، هیڅ ډول هڅه او هاند ونه سپموي، او د یوه فعال او په دیني، ملي او انتقادي تفکر سمبال نسل په روزنه کې، زیار او کوښښ وکړي. هره ورځ د ژمنې په نوي کولو او د مسؤولیت په درک سره، په دې نیت لوست پیل کړي، چې د نن ورځې گران زده‌کوونکي به سبا د یوه پرمختللي افغانستان معماران، او د ټولنې متمدن او گټور اوسېدونکي وي.

همدا راز له خوږو زده کوونکو څخه، چې د هېواد ارزښتناکه پانگه ده، غوښتنه لرم، څو له هر فرصت څخه گټه پورته کړي، او د زده کړې په پروسه کې د ځیرکو او فعالو گډونوالو په توگه، او ښوونکو ته په درناوي سره، له تدریس څخه ښه او اغېزناکه استفاده وکړي.

په پای کې د ښوونې او روزنې له ټولو پوهانو او د ښوونیز نصاب له مسلکي همکارانو څخه، چې د دې کتاب په لیکلو او چمتو کولو کې یې نه ستړې کېدونکې هلې ځلې کړې دي، مننه کوم، او د لوی خدای ﷻ له دربار څخه دوی ته په دې سپېڅلې او انسان جوړوونکې هڅې کې بریا غواړم.

د معیاري او پرمختللي ښوونیز نظام او د داسې ودان افغانستان په هیله چې وگړي یې خپلواک، پوه او سوکاله وي.

د پوهنې وزیر

دکتور محمد میرویس بلخي





# فهرست





| سرلیکونه | مخونه |
|---|---|





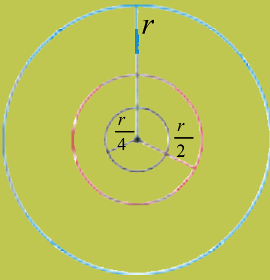
# لومړی څپرکی

# لیمیټ





## د لیمیټ مفهوم




په یوه مستوي کې درې دایرې داسې رسم کړئ چې د O ټکي د دایرو متحد مرکز او شعاع ګانې يې په ترتیب سره $r, \frac{r}{2}$ او $\frac{r}{4}$ وي، دې عملیې ته څو ځلې دوام ورکولای شئ؟



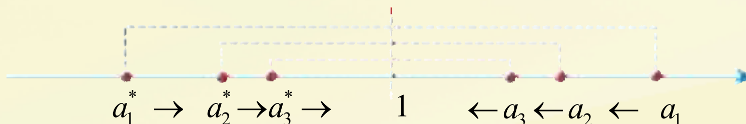

د $a_n = (1+\frac{1}{n})$ او $a_n^* = (1-\frac{1}{n})$ ترادفونه د $n \in IN$ لپاره په پام کې ونیسئ او لاندې فعالیت ترسره کړئ:

- د عددونو په محور باندې د $a_1$ او $a_1^*$ موقعیت(ځای) وښیئ.
- ویلای شئ چې د $a_2$ او $a_2^*$ قیمتونه د $[a_1^*, a_1]$ د فاصلې دننه یا د باندې پراته دي.
- د $a_1$، $a_1^*$ او $a_2$، $a_2^*$ منځنی ټکي یو له بل سره پرتله کړئ.
- پورته پړاوونو ته په پاملرنې سره ویلای شئ چې د $a_3$ او $a_3^*$ د ټکو موقعیت د عددونو پر محور په کوم ځای کې واقع دي.
- آیا ویلای شئ چې د $n$ د تر ټولو لویو قیمتونو په اخیستلو سره د $a_n$ او $a_n^*$ ردیفونه کومو قیمتونو ته نژدې کېږي؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله لیکلای شو:

**پایله**:لیدل کېږي چې د $a_n$ ترادف له ښي لوري څخه د 1 او د $a_n^*$ ترادف له کیڼ لوري څخه د 1 عدد ته د $n$ په زیاتېدو سره نژدې کېږي، یعنې:

ـ د $a_n$ ترادف کله چې $n$ بې نهایت ته تقرب وکړي، مساوي په(1) سره کېږي او همداشان د $a_n^*$ د ترادف $n-$ام حد که $n$ بې نهایت ته نژدې شي هم مساوي له (1) سره کېږي.




ددې لپاره چې د لېمیټ مفهوم مو ښه څرګند کړی وي، په لومړي پړاو کې هغه په څو ترادفونو کې د ګراف په پام کې نیولو سره تر څېړنې لاندې نیسو.

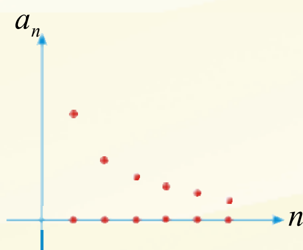
**مثال**: لاندي ورکړل شوي رديفونه د $n$ د تر ټولو لويو قيمتونو لپاره کوم قيمت ته تقرب کوي يا نژدې کېږي، موضوع په گرافيکي ډول تشريح کړئ، په داسې حال کې چې:

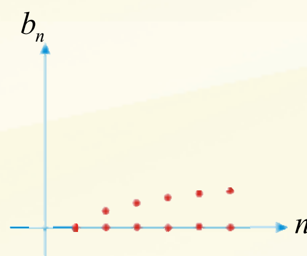
$$a_n = \left(\frac{2n+3}{n}\right) \;\ldots (i) \qquad b_n = \left(\frac{n-1}{n}\right) \;\ldots (ii) \qquad c_n = (-1)^n \frac{1}{n} \;\ldots (iii)$$

**حل**: پوهېږو چې د $n$ د بېلابېلو قيمتونو لپاره گرافيکي شودنه په لاندې ډول ده.

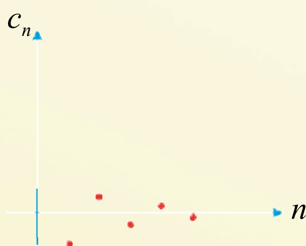
| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | $\to \infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 5 | $\frac{7}{2}$ | 3 | $\frac{11}{4}$ | $\frac{13}{5}$ | $\frac{15}{6}$ | $\frac{17}{7}$ | $\to 2$ |

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\to \infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $b_n$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{4}{5}$ | $\to 1$ |




| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\to \infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_n$ | $-1$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{5}$ | $\to 0$ |

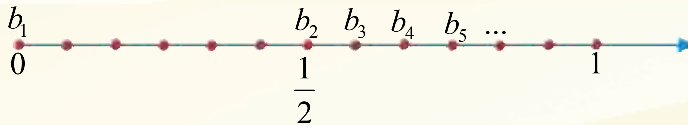



له پورتينو گرافونو څخه ليدل کېږي چې راکړل شوي ترادفونه د $n$ د قيمتونو په زياتېدو سره د ترادفونو قيمت يوه ټاکلي عدد ته نژدې کېږي، لکه: د $a_n$ ترادف د 2 عدد ته د $b_n$ ترادف د 1 عدد ته او د $c_n$ ترادف صفر ته تقرب کوي چې n ته د ډېرو لويو قيمتونو په ورکولو سره موضوع په آسانۍ سره روښانه کېږي.

د ترادف د قيمتونو له جدول څخه د لېميټ قيمت څرگندېږي، د لېميټ په شته والي کې رديف يوه ټاکلي عدد ته نژدې کېږي. دغه ټاکلي عدد ته لېميټ (limit) وايي. چې په lim سره ښودل کېږي.

ددې لپاره د $b_n = \frac{n-1}{n}$ ترادف په پام کې نیسو، لرو چې:

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $b_n$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{4}{5}$ | $\frac{5}{6}$ | $\frac{6}{7}$ | $\frac{7}{8}$ | $\frac{8}{9}$ | $\frac{9}{10}$ | $\frac{10}{11}$ | ... |




او یا که چېرې $I$ ....... $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}$ , $II$ ....... $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots, \frac{n+1}{n}$ او

$(III)$ ....... $2,4,6, \ldots, 2n$ د عددونو ترادفونه په پام کې ونیسو، لیدل کېږي چې که $n$ د بې نهایت لورې ته نژدې شي، نو د $I$ ترادف صفر ته نژدې کېږي د $II$ ترادف د $(1)$ عدد ته نژدې کېږي د $III$ ترادف بې‌نهایت ($\infty$) ته نژدې کېږي.

**د متحول تقرب**: ویل کېږي چې د $x$ متحول د $a$ عدد ته تقرب کوي، په داسې حال کې چې $x$ په اختیاري ډول د $a$ عدد ته نژدې کېږي، یعنې د $x$ او $a$ ترمنځ تفاوت له هر کوچني عدد( $\delta > 0$ ) څخه کوچنی وي یا په لاندې ډول:

$$\forall \delta > 0: |x-a| < \delta \quad \text{یا} \quad x \to a \quad \text{یا} \quad |x-a| \to 0$$

**له ښي لوري د متحول تقرب**: ( $x \to a^+$ ) که چېرې د $x$ د قیمتونو یو متناقص ترادف موجود وي په داسې حال کې چې په تدریجي ډول د $a$ اختیاري عدد ته نژدې شي.

$$x:\ a+0.1,\ a+0.01\ ,\ a+0.001\ ,\ a+0.0001\ ,\ \ldots \to a^+$$

**له کیڼ لوري د متحول تقرب**: ( $x \to a^-$ ) که چېرې د $x$ د قیمتونو یو متزاید ترادف موجود وي په داسې حال کې چې $x$ په تدریجي ډول د $a$ اختیاري عدد ته نژدې شي.

$$x:\ a-0.1,\ a-0.01\ ,\ a-0.001\ ,\ a-0.0001\ ,\ \ldots \to a^-$$

نو د $x$ د متحول تقرب د $a$ عدد ته معادل دی د $x$ د متحول تقرب له ښي لوري او د $x$ د متحول تقرب له چپ لوري، یعنې:

$$x \to a \quad \Leftrightarrow \quad (x \to a^+\ ,\ x \to a^-)$$



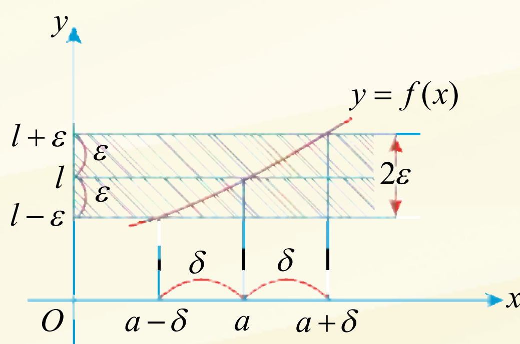
**لومړی بېلګه**: د $x$ متحول د 9 عدد ته نژدې کړئ یا په بل عبارت د $x \to 9$ مفهوم توضیح کړئ.

**حل**:

$$x: 9.1\ ,\ 9.01\ ,\ 9.001\ ,\ 9.0001\ ,\ \ldots\ \to 9^+$$
$$x: 8.9\ ,\ 8.99\ ,\ 8.999\ ,\ 8.9999\ ,\ \ldots\ \to 9^-$$

**تعریف**: که چېرې د $f(x)$ تابع په یوه غیر تړلي انټروال کې چې د $a$ عدد په هغه کې ګډون لري کېدای شي چې تابع په $a$ کې نه وي تعریف شوی. که چېرې د $x$ متحول د $a$ عدد ته نژدې، شي نو د $f(x)$ تابع د $l$ عدد ته نژدې کېږي، نو ویل کېږي چې د $f(x)$ تابع لېمیټ عبارت له $l$ څخه دی، کله چې د $x$ متحول د $a$ عدد ته تقرب وکړیږ، نو داسې یې لیکو:

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \quad \text{یا} \quad \begin{matrix} x \to a \\ f(x) \to l \end{matrix}$$




$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0\ :\ |x-a| < \delta \quad \Rightarrow\ |f(x)-l| < \varepsilon$$
$$\lim_{x\to a} f(x) = l \ \Leftrightarrow \quad (|x-a| \to 0 \Rightarrow\ |f(x)-l| \to 0)$$



**پوښتنه**

د $f(x) = 2x$ تابع په ګرافیکي ډول وښیئ چې که د $x$ د (3) عدد ته نژدې شي د $f(x)$ د (6) عددته نژدې کېږي.

## د ښي او کيڼ خوا لېمیټونه

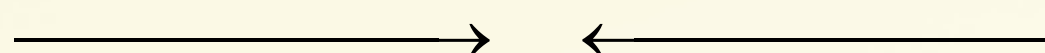
مخامخ تصویر ته پاملرنه وکړئ وواياست چې مخامخ ونې ته له کومو خواوو څخه نژدې کېدای شو.






په لاندې جدول کې د $x \neq 1$ ، $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ ته څېنې قیمتونه ورکړل شوي.

| $x$ | 0.98 | 0.99 | 0.999 | ? | 1.001 | 1.01 | 1.02 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1.98 | 1.99 | 1.999 | ? | 2.001 | 2.01 | 2.02 |



- د تابع ګراف رسم کړئ.
- که $x$ د $(1)$ عدد ته نژدې شي، نو $f(x)$ کوم عدد ته نژدې کېږي.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله لیکلای شو:

**د ښي خوا لېمیټ:** د $f(x)$ تابع د $a$ په عدد کې د ښي لوري $l_1$ لېمیټ لري که چېرې د هر $\varepsilon > 0$ لپاره یو کوچنی عدد د $\delta > 0$ موجود وي داسې چې که: $x \in (a, a+\delta) \Rightarrow f(x) \in (l_1 - \varepsilon, l_1 + \varepsilon)$ یا

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = l_1$$

**د کيڼ خوا لېمیټ:** د $f(x)$ تابع د $a$ په عدد کې د کيڼ لوري $l_2$ لېمیټ لري. که چېرې د هر $\varepsilon > 0$ لپاره د $\delta > 0$ یو عدد پیدا شي داسې چې $x \in (a-\delta, a) \Rightarrow f(x) \in (l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon)$ یا

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = l_2$$

د $f(x)$ تابع هغه وخت چې $x \to a$ ته نژدې شي د $l$ لېمیټ لري، یعنې: $\lim_{x \to a} f(x) = l$ په دې شرط چې:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = l = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

**دویمه بېلګه**: و ښيئ چې $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$ سره دی.

**حل**: د ښي او کيڼې خوا لېميټونه تر څېړنې لاندې نيسو:

| $x$ | 3.5 | 3.1 | 3.01 | 3.001 | ... | $3^+$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 6.5 | 6.1 | 6.01 | 6.001 | ... | 6 |

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

| $x$ | 2.5 | 2.9 | 2.99 | 2.999 | ... | $3^-$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 5.5 | 5.9 | 5.99 | 5.999 | ... | 6 |

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

ليدل کېږي چې د ښي خوا او کيڼې خوا لېمېټونه سره مساوي دي، نو $\lim\limits_{x\to 3}=\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$ دی.

**دویمه طریقه**: د لېميټ د تعريف په پام کې نيولو سره فرضوو چې د هر اختياري کوچني عدد $\varepsilon$ لپاره يو $\delta$ شتون لري داسې چې:

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists\delta>0:\ |x-a|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x)-l|<\varepsilon$$

$$|x-3|<\delta\ \Rightarrow\left|\frac{x^2-9}{x-3}-6\right|=\left|\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}-6\right|=|x+3-6|=|x-3|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \varepsilon=\delta$$

له پورتنۍ اړيکې څخه دا معلومېږي چې $\varepsilon$ له $\delta$ سره اړيکه لري، که $\delta$ ته قيمت ورکړو $\varepsilon$ قيمت اخلي او که $\varepsilon$ ته قيمت ورکړو $\delta$ قيمت اخلي، بنا پر دې هغه تعريف چې د لېميټ لپاره موجود دی سم دی او تابع لېميټ لري، يعنې: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$

**پوښتنه**

وښيئ چې د $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x-2}$ تابع کله چې $x\to 2$ لېميټ نه لري.

## د لیمیټ خاصیتونه (Properties of Limit)

د مخامخ مساوات دلیمیټونو دواړه خواوې کله چې $x \to -1$ وکړي، سره مساوي دي او که نه؟

$$\lim_{x\to -1}(x^2 \pm x) = \lim_{x\to -1} x^2 \pm \lim_{x\to -1} x$$




ددې فعالیت د سرته رسولو لپاره لاندې پوښتنو ته ځوابونه پیدا کړئ:

- که $x$ د 2 عدد ته نژدې شي، نو د $f(x) = x + 2$ تابع لیمیټ به څو وي؟
- که $x \to 3$ ته تقرب وکړي، نو د $g(x) = 2x$ تابع لیمیټ پیدا کړئ.
- $\lim_{x\to 2} f(x) \pm \lim_{x\to 2} g(x)$ پیدا کړئ.
- $\lim_{x\to 2} f(x) \cdot \lim_{x\to 2} g(x)$ پیدا کړئ.
- $\lim_{x\to 2} f(x) \div \lim_{x\to 2} g(x)$ پیدا کړئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې لیکلای شو:

که $\lim_{x\to a} f(x) = A$ او $\lim_{x\to a} g(x) = B$ وي، نو:

1) $\lim_{x\to a} Kf(x) = K\lim_{x\to a} f(x) = KA$

2) $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = A \pm B$

3) $\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = A \cdot B$

4) $\lim_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \dfrac{A}{B}\ ,\ \lim_{x\to a} g(x) = B \neq 0$

5) $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{A}\ ,\ \lim_{x\to a} f(x) = A \geq 0$

له پورتنیو خواصو څخه درې خاصیتونه ثبوتوو او پاتې یې د زده‌کوونکو کورنۍ دنده ده.

**بې نهایت کوچنۍ تابع ګاڼې:** د $\varepsilon(x)$ تابع کله چې $x \to a$ ته نژدې شي، بې نهایت کوچنۍ بللې کېږي، که چېرې $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ وي.



1- ددې لپاره چې $\lim_{x\to a} f(x)=b$ سره شي، لازم او کافي ده چې د $f(x)$ تابع د یوه ثابت عدد $b$ او یوې بې نهایت کوچني تابع $\varepsilon(x)$ کله چې $x\to a$ د مجموعې په شکل وښودل شي، یعنې:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=b+\varepsilon(x) \\ \lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x)=b$$

2- که چېرې $\varepsilon(x)$ ، $x\to a$ ته نژدې شي، بې نهایت کوچنۍ تابع وي، خو صفر نه وي، نو $\lim_{x\to a}\dfrac{1}{\varepsilon(x)}=\infty$

د بې نهایت کوچنۍ تابع گانو مجموعه بیا هم یوه بې نهایت کوچنۍ تابع ده.

3- د بې نهایت کوچنیو تابع گانو د ضرب حاصل بیا هم یوه بې نهایت کوچنۍ تابع ده.

4- که چېرې $\varepsilon(x)$ یوه بې نهایت کوچنۍ تابع او $u(x)$ داسې یوه تابع وي چې لېمیټ یې صفر نه وي، نو د $v(x)=\dfrac{\varepsilon(x)}{u(x)}$ تابع یوه بې نهایت کوچنۍ تابع ده.

**مثال**:

I) د $\varepsilon(x)=x^2-9$ تابع کله چې $x\to 3$ ، یوه بې نهایت کوچنۍ تابع ده ځکه چې:

$$\lim_{x\to 3}(x^2-9)=0$$

II) $\varepsilon(x)=\dfrac{1}{2x}$ تابع کله چې $x\to\infty$ ته نژدې شي بې نهایت کوچنۍ تابع ده:

$$\lim_{x\to\infty}\varepsilon(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x}=0$$

**پوښتنې**: د تېرو خاصیتونو په مرسته لاندې سوالونه حل کړئ.

$$1)\ \lim_{x\to 2}(2x^2-1)=\lim_{x\to 2}2x^2-\lim_{x\to 2}1=2\lim_{x\to 2}x^2-\lim_{x\to 2}1=2\cdot 2^2-1=7$$

$$2)\ \lim_{x\to -3}(x-1)^2=\lim_{x\to -3}(x-1)\cdot\lim_{x\to -3}(x-1)=(-4)(-4)=16$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\frac{4x-3}{x+1}=\frac{\lim_{x\to 0}4x-\lim_{x\to 0}3}{\lim_{x\to 0}x+\lim_{x\to 0}1}=\frac{0-3}{0+1}=-3$$

د پورتنیو پوښتنو له حل څخه د لېمیټ یو خاصیت داسې بیان او ثبوو:

1. د څو تابع گانو د مجموعې لېمیټ د نومړو هرې تابع د لېمیټونو له مجموعې سره مساوي دي، یعنې: که چېرې د $f(x_1), f(x_2)$ تابع گانې وي، نو لرو چې:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)+f(x_2)\right]=\lim_{x\to a}f(x_1)+\lim_{x\to a}f(x_2)$$

**ثبوت**:که $\lim_{x\to a}f(x_1)=b_1\ ,\ \lim_{x\to a}f(x_2)=b_2$ او $\varepsilon_1$ او $\varepsilon_2$ بې نهایت کوچنۍ تابع گانې وي، نو:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\pm f(x_2)\right]=b_1\pm b_2$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1)=b_1+\varepsilon_1\ \ .....\ I \\ f(x_2)=b_2+\varepsilon_2\ \ .....\ II \end{array}\right\}\Rightarrow f(x_1)\pm f(x_2)=(b_1+\varepsilon_1)\pm(b_2+\varepsilon_2)=b_1\pm b_2+(\varepsilon_1\pm\varepsilon_2)$$

ځرنګه چې $(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2)$ د بې نهایت کوچنیو تابع ګانو مجموعه او تفاضل ده او د بې نهایت کوچنیو تابع ګانو مجموعه او تفاضل بیاهم یوه بې نهایت کوچنۍ تابع ده، نو:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\pm f(x_2)\right]=b_1\pm b_2=\lim_{x\to a}f(x_1)\pm\lim_{x\to a}f(x_2)$$

**2. د دوو یا څو تابع ګانو د ضرب د حاصل لیمیټ د نومورو تابع ګانو د لیمیټونو د ضرب له حاصل سره مساوي دی:**

**ثبوت:**

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\cdot f(x_2)\right]=\lim_{x\to a}f(x_1)\cdot\lim_{x\to a}f(x_2)=b_1\cdot b_2$$

$$\left.\begin{aligned}f(x_1)=b_1+\varepsilon_1\\ f(x_2)=b_2+\varepsilon_2\end{aligned}\right\}\Rightarrow f(x_1)\cdot f(x_2)=(b_1+\varepsilon_1)(b_2+\varepsilon_2)$$

$$f(x_1)\cdot f(x_2)=b_1\cdot b_2+b_1\cdot\varepsilon_2+b_2\cdot\varepsilon_1+\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2$$

ځرنګه چې $\varepsilon_1$ او $\varepsilon_2$ ډېر کوچني عددونه دي، نو د ضرب حاصل یې د $b_1$ او $b_2$ سره او همداشان په خپلو کې بې‌نهایت کوچنۍ کېږي، نو:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\cdot f(x_2)\right]=b_1\cdot b_2=\lim_{x\to a}f(x_1)\cdot\lim_{x\to a}f(x_2)$$

3. د دوو تابع ګانو د نسبت لیمیټ د هغو تابع ګانو د لیمیټونو له نسبت څخه عبارت دی، لکه په لاندې ډول:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\frac{b_1}{b_2}\quad,\quad g(x)=b_2\neq 0$$

**ثبوت:**

$$\left.\begin{aligned}f(x)=b_1+\varepsilon_1\\ g(x)=b_2+\varepsilon_2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}$$

د مساوات له دواړو خواوو څخه $\frac{b_1}{b_2}$ تفریق کوو:

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}-\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_2(b_1+\varepsilon_1)-b_1(b_2+\varepsilon_2)}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}$$

$$=\frac{b_2b_1+b_2\varepsilon_1-b_1b_2-b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}=\frac{b_2\varepsilon_1-b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_1)}$$

$$\Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_2\varepsilon_1-b\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}+\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_2\varepsilon_1-b_1\varepsilon_2+b_1b_2+b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}$$

$$=\frac{b_2(b_1+\varepsilon_1)}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}\quad\Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}$$

خرنگه چې $\varepsilon_1$ او $\varepsilon_2$ ډېر کوچني مثبت عددونه( $0<\varepsilon<1$ )دي، نو کله چې $x\to a$ وکړي صفر کېږي او په پایله کې په لاس راځي چې:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\frac{b_1}{b_2}$$

**د ساندویچ قضیه**: که چېرې د $f(x)$, $g(x)$ او $h(x)$ تابع ګانې د هر $x$ لپاره په یوه غیر تړلي انټروال کې چې د $a$ عدد په کې شامل دی(ولو که $x\neq a$ ) او $f(x)\le g(x)\le h(x)$ شرط صدق وکړي په هغه صورت کې چې $\lim_{x\to a}f(x)=b=\lim_{x\to a}h(x)$ وي، نو $\lim_{x\to a}g(x)=b$ دی.

**مثال**: که د $u(x)$ تابع دغه خاصیت( $1-\frac{x^2}{4}\le u(x)\le 1+\frac{x^2}{2}$ ) ولري، نو $\lim_{x\to a}u(x)$ په لاس راوړئ.

**حل**: لیدل کېږي چې $\lim_{x\to 0}(1-\frac{x^2}{4})=1=\lim_{x\to 0}(1+\frac{x^2}{2})$ دی، نو د ساندویچ د قضیې په پام کې نیولو سره لرو چې:

$$\lim_{x\to 0}u(x)=1$$

**قضیه**: که چېرې $f(x)$ او $g(x)$ داسې تابع ګانې وي چې $f(x)\le g(x)$ نو د لیمیټ د شتون په صورت کې یې لمیټ $\lim_{x\to a}f(x)\le\lim_{x\to a}g(x)$ سره دی.

**مثال**: د $f(x)=\frac{15x-4}{5x+6}$ او $g(x)=\frac{15x+4}{5x-6}$ تابع ګانې په پام کې نیسو په واضح ډول معلومېږي چې د $x>1$ لپاره لرو $f(x)<g(x)$ دی.

**حل**:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{15x-4}{5x+6}=\frac{15}{5}=3$$

$$\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{15x+4}{5x-6}=\frac{15}{5}=3$$



## پوښتنې

لاندې لیمیټونه د امکان په صورت کې پیدا کړئ.

1) $\lim_{x\to 0}6x^3-2x^2+5x+3$

2) $\lim_{x\to -1}x^7-2x-5$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{(9x+2)^2-4}{x}$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{5x^2+7x}{(2x-5)^2-9}$

5) $\lim_{x\to 2}\sqrt{x-2}$

6) $\lim_{x\to 1}\frac{2x}{x^2-4x+1}$

## د نسبتي تابع ګانو لیمیټونه

آیا پوهیږئ چې مخامخ اړیکې په څه نامه یادیږي؟

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$$

$$\infty - \infty$$

$$0 \cdot \infty$$




- د $y = x^2 - 1$ تابع لیمیټ هغه وخت پیدا کړئ چې $x \to -2$ ته تقرب وکړي.
- د $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ تابع لیمیټ هغه وخت پیدا کړئ چې $x \to 1$ ته تقرب وکړي.
- د $y = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$ تابع لیمیټ هغه وخت پیدا کړئ چې $x \to \infty$ ته تقرب وکړي.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله لیکلای شو:

### پایله

- د ځینو تابع ګانو لیمیټ مستقیماً د قیمت په وضع کولو سره لاسته راځي.
- ځنې تابع ګانې د $\frac{0}{0}$ , $\frac{\infty}{\infty}$ , $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$ ... مبهم شکلونه لري چې د ابهام د له منځه وړلو څخه وروسته د تابع لیمیټ لاسته راځي چې په لاندې ډول یې تر څېړنې لاندې نیسو:

### I- د $\frac{0}{0}$ مبهم شکل:




- د $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 1}$ تابع قیمت د $x = -1$ په نقطه کې وڅېړئ.
- د $f(x)$ تابع لیمیټ کله چې $x \to 1$ وي د ابهام کومه بڼه لري.
- آیا د $f(x)$ تابع په داسې ډول ساده کولای شو چې د $x = 1$ لپاره یو معین قیمت ولري؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

که چېرې یوه تابع د $\frac{0}{0}$ په شکل مبهمه بڼه ولري، د لیمیټ د پیدا کولو لپاره یې لومړی تابع د تجزیې په مرسته ساده کوو د ابهام عامل (خبیثه فکتور) له منځه وړو او بیا یې د لیمیټ قیمت په لاس راوړو.

**مثال**: لاندې لېمېټونه پيدا کړئ.

$$1)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}\quad,\quad 2)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}\quad,\quad 3)\ \lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$$

**حل**: لومړی د لېمېټ بڼه ټاکو:

$$1)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=\frac{(-2)^2-4}{-2+2}=\frac{0}{0}$$

څرنګه چې پاسنې لېمېټونه د $\frac{0}{0}$ بڼه لري، نو د تجزيې په مرسته يې وروسته له ساده کولو څخه د لېمېټ قيمت په لاندې ډول په لاس راوړو:

$$\Rightarrow \lim_{x\to -2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)}=\lim_{x\to -2}(x-2)=-2-2=-4$$

$$2)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}=\frac{2^2-12+8}{2-2}=\frac{0}{0}$$

**حل**: بيا هم لېمېټ د $\frac{0}{0}$ مبهم شکل لري:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-4)=2-4=-2$$

$$3)\ \lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}=\frac{0}{0}$$

**حل**: ليدل کېږي چې نوموړی لېمېټ بيا هم د $\frac{0}{0}$ بڼه لري، نو د لېمېټ د لاسته راوړلو لپاره د کسر صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}\cdot\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4}=\lim_{x\to 16}\frac{(x-16)}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}$$

$$=\lim_{x\to 16}\frac{1}{\sqrt{x}+4}=\frac{1}{8}$$



**پوښتنې**

$$1)\ \lim_{x\to 3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}=?\qquad 2)\ \lim_{x\to 1}\frac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}=?\qquad 3)\ \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=?$$

$$4)\ \lim_{x\to 2}\frac{\frac{2x}{x^2+1}-\frac{4}{5}}{x-2}=?\qquad 5)\ \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+3}-\frac{1}{3}}{x}=?$$

## II- د $\frac{\infty}{\infty}$ مبهم شکل

آیا د مخامخ تابع لېمیټ ټاکلی شئ؟

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x+8}{2x^2-2}$$




- د $f(x)=2x^4+x^3-4x-1$ تابع لېمیټ چې $x\to\infty$ وڅېړئ.
- د $g(x)=x^3-2x-4$ تابع لېمیټ چې $x\to\infty$ وڅېړئ.
- د $y=\frac{5}{x-2}$ تابع لېمیټ چې $x\to\infty$ وڅېړئ.
- د $\frac{f(x)}{g(x)}$ تابع لېمیټ هغه وخت په لاس راوړئ چې $x\to 0$ وکړي.
- د $\frac{f(x)}{g(x)}$ تابع لېمیټ هغه وخت په لاس راوړئ چې $x\to\infty$ وکړي.

له پاسني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

**پایله**: هغه توابع چې د $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه ولري د لېمیټ د پیداکولو لپاره یې داسې کړنه کوو:

د تابع صورت او مخرج په هغه متحول چې تر ټولو لوی توان ولري وېشو، وروسته له ساده کولو څخه یې لېمیټ په لاس راځي.

**لومړی مثال**: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2}$ پیداکړئ.

**حل**: لومړی د لېمیټ بڼه ټاکو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2}=\frac{\infty-1}{\infty-2}=\frac{\infty}{\infty}$$

څرنګه چې پوښتنه د $\frac{\infty}{\infty}$ شکل لري، نو صورت او مخرج په $x^2$ باندې وېشو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}}{3-\frac{2}{x^2}}=\frac{1-\frac{1}{\infty}}{3-\frac{2}{\infty}}=\frac{1-0}{3-0}=\frac{1}{3}$$

**دويم مثال**: د $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x-2}$ پيدا کړئ.

**حل**: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x-2}=\frac{\infty}{\infty}$

څرنګه چې پوښتنه د $\frac{\infty}{\infty}$ شکل لري، نو صورت او مخرج د $x$ له ټولو په لوړ توان وېشو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}{\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{1-\frac{2}{\infty}}{\frac{1}{\infty}-\frac{2}{\infty}}=\frac{1-0}{0}=\frac{1}{0}=\infty$$

**دريم مثال**: $\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2-2}$ پيدا کړئ.

**حل**: $\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=\frac{\infty}{\infty}$

څرنګه چې پوښتنه $\frac{\infty}{\infty}$ شکل لري، نو صورت او مخرج د $x$ له ټولو په لوړ توان وېشو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}}=\frac{\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty}}{1-\frac{2}{\infty}}=\frac{0}{1-0}=\frac{0}{1}=0$$

**يادونه**: هغه تابع ګانې چې د $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه ولري، پرته له دې چې عمليه پرې سرته ورسوو کولای شو، په لاندې ډول د هغوی لیمیټ په لاس راوړو:

د $f(x)=\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+...+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+...+b_n}$ تابع په پام کې ونیسئ که چېرې ( $x\to\infty$ ) کړی وي، نو دلته درې حالتونه ممکن دي:

1- د $m=n$ لپاره د نوموړی کسر لیمیټ عبارت دی له $\dfrac{a_0}{b_0}$.

2- د $m<n$ لپاره د نوموړی کسر لیمیټ عبارت له صفر څخه دی.

3- د $m>n$ لپاره د نوموړی کسر لیمیټ عبارت له $\pm\infty$ څخه دی.

**خلورم مثال**: لاندې لیمیټونه پیدا کړئ.

$$1)\ \lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+6x^4-x^3+x-1}{-x^4+2x^2-3}\qquad 2)\ \lim_{x\to3}\frac{-8+6x^3-x^2+x}{5x^3-x^4+6x-1}\qquad 3)\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}$$

**حل**:

1- څرنګه چې $m=n$ دی، نو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+6x^4-x^3+x-1}{-x^4+2x^2-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^4}{-x^4}=-6$$

2- څرنګه چې $m<n$ دی، نو د نوموړی تابع لیمیټ صفر دی.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-8+6x^3-x^2+x}{5x^3-x^4+6x-1}=0$$

3- څرنګه چې $m>n$ دی، نو د نوموړي تابع لیمیټ مساوي له $\infty$ سره دی:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}=\infty$$

**يادونه**: زده‌کوونکي دې ورکړل شوي څوابونه په کور کې د عملیې د سرته رسولو څخه وروسته په لاس راوړي.



## پوښتنې

لاندې لیمیټونه پیدا کړئ؟

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6}{x^2-x}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+x^2+x+6}{x^3-3x+4}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+x^2-x+9}{x^4+x^2-x+5}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x^2-x+7}{x^3-x+5}$

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2}{x+1}$

### III- د $(\infty-\infty)$ او $(0\cdot\infty)$ مبهم شکلونه

د مخامخ لېمیټونو قیمتونه پیدا کړئ.

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}-\frac{x-1}{x^2-4}$$

$$\lim_{x\to 3}(x^2-9)\cdot\frac{2x^3-4}{x-3}$$




- د $a+1$ مزدوج ولیکئ.
- د $\sqrt{x}-1$ مزدوج ولیکئ.
- د $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{x+1}$ لېمیټ پیدا کړئ، کله چې $x\to\infty$ تقرب وکړي.
- د $f(x)=(2x-1)(x+1)$ تابع لېمیټ وټاکئ، کله چې $x\to\infty$ تقرب وکړي.

له پورتني فعالیت څخه پایله داسې بیانوو:

د هغو تابع ګانو چې د $(\infty-\infty)$ او $(0\cdot\infty)$ مبهم شکلونه ولري، د لېمیټ د پیداکولو لپاره یې د کسرونو له جمع کولو، ضرب او مزدوج څخه ګټه اخلو او هغه داسې ساده کوو، تر څو چې د $\frac{0}{0}$ او یا $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه غوره کړي، وروسته یې لېمیټ په لاس راوړو.

**مثال**: لاندې لېمیټونه پیدا کړئ.

1) $\lim_{x\to 1}(\frac{9}{x-1}-\frac{8x+10}{x^2-1})=?$ 2) $\lim_{x\to 1}(x-1)(\frac{1}{x^2+2x-3})=?$

**حل** 1:

$$\lim_{x\to 1}(\frac{9}{x-1}-\frac{8x+10}{x^2-1})=\frac{9}{1-1}-\frac{8\cdot 1+10}{1^2-1}=\frac{9}{0}-\frac{18}{0}=\infty-\infty$$

څرنګه چې نوموړی لېمیټ د $(\infty-\infty)$ بڼه لري، نو لیکلای شو چې:

$$=\lim_{x\to 1}\frac{9x+9-8x-10}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

2) $\lim_{x\to 1}(x-1)(\frac{1}{x^2+2x-3}) = ?$

حل2: $\lim_{x\to 1}(x-1)(\frac{1}{x^2+2x-3}) = (1-1)(\frac{1}{1^2+2-3}) = 0\cdot\frac{1}{3-3} = 0\cdot\frac{1}{0} = 0\cdot\infty$

ليدل کېږي چې نوموړی لېمیټ د $(0\cdot\infty)$ مبهم شکل لري، نو:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2+2x-3} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x+3} = \frac{1}{4}$$



**پوښتنې**

لاندې لېمیټونه پیدا کړئ.

1) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

2) $\lim_{x\to 1}(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2})$

3) $\lim_{x\to\infty}(x^5-8x^3)$

4) $\lim_{x\to 5}\left[(x^2-25)\frac{1}{x-5}\right]$

5) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$

## د $1^{\infty}, \infty^{0}, 0^{0}$ مبهم شکلونه

د مخامخ لیمیټ مبهم شکل وټاکئ؟

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = ?$$




- د $y = x^{x}$ تابع لیمیټ په هغه صورت کې پیداکړئ چې $x \to 0$ وکړي.
- د $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ لیمیټ بڼه په هغه صورت کې وټاکئ چې $x \to \infty$ وکړي.
- د کومې عملیې په مرسته کولای شو چې د $0^{0}, \infty^{0}, 1^{\infty}$ مبهم شکلونو ابهام له منځه ویسو؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

که چیرې یوه تابع پورتني مبهم شکلونه څانته غوره کړي، هغه د طبیعي لوګاریتم په مرسته د $0\cdot\infty$ شکل ته د اړولو وړ دي، یعنې:

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)} \Rightarrow \ln(\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}) = \lim_{x\to a}(\ln f(x)^{g(x)}) = \lim_{x\to a}[g(x)\ln f(x)]$$

**یادونه:**

I- که چیرې $n \to \infty$ وکړي د $a_n = (1+\frac{1}{n})^{n}$ ترادف $e = 2.71828182$ عدد ته تقرب کوي.

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n} = e$$

چې په لاندې جدول کې ښکاربږي:

| $n$ | $\frac{1}{n}$ | $1+\frac{1}{n}$ | $(1+\frac{1}{n})^{n}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 0.5 | 1.5 | 2.25 |
| 5 | 0.2 | 1.2 | 2.48832 |
| 10 | 0.1 | 1.1 | 2.59374246 |
| 100 | 0.01 | 1.01 | 2.704813829 |
| 1000 | 0.001 | 1.001 | 2.716923932 |
| 10000 | 0.0001 | 1.0001 | 2.718145926 |
| 100000 | 0.00001 | 1.00001 | 2.718268237 |
| 1000000 | 0.000001 | 1.000001 | 2.718280469 |
| 1000000000 | $10^{-9}$ | $1+10^{-9}$ | 2.718281828 |

نو $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e = 2.718281828$ دی چې ... $e = 2.71$ عدد ته د Euler عدد وايي.

II- لاندې لیمیتونه پیدا کړئ:

$$1)\ \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e \qquad 2)\ \lim_{x\to\infty}(1+\frac{\alpha}{x})^{\beta x} = e^{\alpha\beta}$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\frac{Ln(1+x)}{x} = 1 \qquad 4)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

**ثبوت:** پوهېږو چې څلور واړه پوښتنې د $1^\infty$ مبهم شکلونه لري.

$$1)\ x=\frac{1}{\alpha} \quad \Rightarrow \alpha=\frac{1}{x}\ ,\ \alpha\to 0 \ \Rightarrow\ x\to\infty \ \Rightarrow\ \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$$

$$2)\ \lim_{x\to\infty}(1+\frac{\alpha}{x})^{\beta x} = e^{\alpha\beta}$$

$$u=\frac{\alpha}{x} \ \Rightarrow\ x=\frac{\alpha}{u}\ ,\ x\to\infty \ \Rightarrow\ u\to 0$$

$$\lim_{u\to 0}(1+u)^{\beta\frac{\alpha}{u}} = \lim_{u\to 0}\left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{\alpha\beta}$$

$$x=\frac{1}{u} \ \to\ u=\frac{1}{x}\ ,\ u\to 0 \ \Rightarrow\ x\to\infty$$

$$\lim_{u\to 0}\left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{\alpha\beta} = \lim_{x\to\infty}\left[(1+\frac{1}{x})^x\right]^{\alpha\beta} = e^{\alpha\beta}$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} \ \Rightarrow\ \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)\right] = \lim_{x\to 0}\left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]$$

$$\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]\ ,\ x=\frac{1}{u} \ \Rightarrow\ u=\frac{1}{x}\ ,\ x\to 0 \ \Rightarrow\ u\to\infty$$

$$\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \ln\left[\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^u\right] = \ln e = 1$$

4) $y = e^x - 1 \quad \Rightarrow \; e^x = 1 + y \quad \Rightarrow \; x = \ln(1+y)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}} = \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}}$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{1}{y}\ln(1+y)} = \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}} \;,\; y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y} \;,\; y \to 0 \Rightarrow x \to \infty$$

$$= \frac{1}{\ln \lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x} = \frac{1}{\ln e} = \frac{1}{1} = 1$$

**د $1^\infty$ مبهم شکل عمومي حالت**: **که چېرې د اکسپوننشيل تابع لېميټ يعنې** $\lim\limits_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}$ د $1^\infty$ مبهم شکل ځانته غوره کړي په دې حالت کې $\alpha = u - 1$ سره تعويضوو، په نتيجه کې:

$$\lim_{x\to a} u^v = \lim_{x\to a}[(1+u-1)]^{\frac{v}{u-1}u-1} = \lim_{x\to a}\left[(1+\alpha)^{\frac{v}{\alpha}\alpha}\right] = \lim_{x\to a}\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\lim\limits_{x\to a}(v\alpha)}$$

څرنګه چې $\alpha = u - 1$ دی که چېرې $u \to 1$ **نو** $\alpha \to 0$ **ته نژدې کېږي په پايله کې** :

$$\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)} = \left[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\lim\limits_{x\to a}[v(u-1)]} = e^{\lim\limits_{x\to a}[v(u-1)]} = e^P$$

$$\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)} = e^P \quad , \quad P = \lim_{x\to a}[v(u-1)]$$

**لومړی مثال**: د $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x$ لېميټ قيمت په لاس راوړئ.

**حل**: لومړی د لېميټ بڼه ټاکو معلومېږي چې لېميټ د $1^\infty$ مبهم شکل لري، نو له فورمول څخه کار اخلو:

$$u = 1 + \frac{2}{x} \quad , \quad v = x$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x = e^P \quad , \quad P = \lim_{x\to\infty}\left[x(1+\frac{2}{x}-1)\right] = 2$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x = e^P = e^2$$

**دويم مثال**: د $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}}$ **قيمت محاسبه کړئ**.

**حل**:**لومړی د لېميټ بڼه ټاکو** $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}} = 1^\infty$

**څرنګه چې معلومیږي نوموړی لیمیټ د** $1^\infty$ مبهم شکل لري، نو له فورمول څخه کار اخلو:

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}}=e^P$$

$$u=1+\frac{1}{x} \quad , \quad v=\frac{x-5}{2}$$

$$P=\lim_{x\to a}[v(u-1)]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x-5}{2}(1+\frac{1}{x}-1)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x-5}{2}(\frac{1}{x})\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x-5}{2x}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}}=e^P=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

**دریم مثال**: $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=?$

**حل**: **د تیر په شان بیاهم لومړی د لیمیټ بڼه ټاکو،** $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=1^\infty$

**څرنګه چې معلومیږي لیمیټ د** $1^\infty$ مبهم شکل لري د فورمول په مرسته یې محاسبه کوو:

$$u=\cos x \quad , \quad v=\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^P$$

$$P=\lim_{x\to a}[v(u-1)]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}(\cos x-1)\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x(\cos x+1)}$$

$$\frac{\cos^2 x+\cos x-\cos x-1}{x(\cos x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x-\cos^2 x}{x(\cos x+1)}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+1}=-1\cdot\frac{0}{2}=0$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^P=e^0=1$$



**پوښتنې**

لاندې لیمیټونه محاسبه کړئ.

1) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x+2}$

2) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x}$

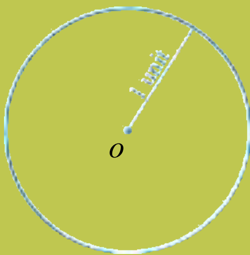
3) $\lim_{x\to\infty}(\frac{x+3}{x-1})^{x+2}$

4) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}$

5) $\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x}}$

## د مثلثاتي تابع ګانو لیمیټ

***Trigonometric functions limits***




که د یوې دایرې شعاع یو واحد (1unit) وي، نوموړې دایرې ته څه ډول دایره وایي.




- دوضعیه کمیاتو په سیستم کې د $C(o,r)$ په مثلثاتي دایره کې د $\theta$ مرکزي زاویه رسم کړئ.
- د $C$ له بهرنې ټکي څخه په دایره باندې د $ox$ پر محور د $\overline{CA}$ مماس او $\overline{MB}$ عمود رسم کړئ.
- د $C$ ټکی د دایرې له مرکز سره وصل کړئ.
- د مرکزي زاويې د مقابل قوس د اندازه کولو واحد په ګوته کړئ.

له پورتني فعالیت څخه قضیه داسې بیان او ثبوتوو:

**قضیه**: د یوې زاويې د ساین او د هغې زاويې د نسبت لیمیټ مساوي په (1) دي، کله چې زاویه صفر ته تقرب وکړي.

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

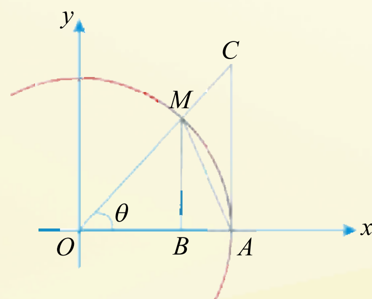
**ثبوت**: په لاندې شکل کې د $MOA$ او $COA$ د مثلثونو او $OMA$ د قطاع مساحتونه په لاس راوړو:

$$\text{مثلث مساحت}\ MOA\ \text{د}=\frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{BM}=\frac{1}{2}\cdot r\cdot\overline{BM}=\frac{\overline{BM}}{2}\cdot r$$

$$\text{قطاع مساحت}\ O\overset{\frown}{A}M\ \text{د}=\frac{1}{2}\theta r^2$$

د $\theta$ د زاويې پراخوالی باید په رادیان لاسته راوړو.

$$\text{مساحت}\ C\overset{\Delta}{O}A\ \text{د}=\frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{AC}=\frac{1}{2}\cdot r\cdot\overline{AC}=\frac{\overline{AC}}{2}\cdot r$$




د $MOA$ او $COA$ مثلثونو مساحتونه د $OMA$ د قطاع له مساحت سره پرتله کوو:

$$\frac{1}{2}r\,\overline{BM}<\frac{1}{2}\theta r^2<\frac{\overline{AC}}{2}\cdot r$$

د نامساواتو دواړه خواوې په $\frac{2}{r^2}$ کې ضربوو:

$$\frac{\overline{BM}}{r} < \theta < \frac{\overline{AC}}{r} \Rightarrow \sin\theta < \theta < \tan\theta \Rightarrow 1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1 \Rightarrow \lim_{\theta\to 0}\cos\theta \le \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} \le \lim_{\theta\to 0} 1$$

د ساندویچ د قضیې پر بنسټ معلومېږي چې $\lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 1$ او همدارنګه $\lim_{\theta\to 0} 1 = 1$ دی، نو $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ دی.

پوهېږو چې د هرې زاويې ساين د $(1)$ او $(-1)$ د عددونو تر منځ تحول کوي:

$$-1 \le \sin\theta \le 1$$

$$-\frac{1}{\theta} \le \frac{\sin\theta}{\theta} \le \frac{1}{\theta}$$

$$-\lim_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta} \le \lim_{\theta\to\infty}\frac{\sin\theta}{\theta} \le \lim_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta}$$

د ساندویچ د قضیې پر اساس لیکلای شو چې:

$$\left.\begin{array}{l} -\lim\limits_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta} = 0 \\ \lim\limits_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{\theta\to\infty}\frac{\sin\theta}{\theta} = 0$$

په پایله کې ویلای شو چې د یوې زاویې ساین او د هغې زاویې د نسبت لیمیټ مساوي په صفر دی هغه وخت چې زاویه بې‌نهایت ته نژدې شي.

**لومړی مثال:** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$ پیدا کړئ.

**حل:** که $2x = \alpha$ نو $x = \frac{\alpha}{2}$ کېږي، څرنګه چې $x \to 0$ کړی دی، نو $\alpha \to 0$ کوي، نو لیکلای شو:

$$\frac{\sin\alpha}{\frac{\alpha}{2}} = 2\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

له پورته مساواتو څخه لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow 2\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 2\cdot 1 = 2$$

**دويم مثال**: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\tan 2x}{7x}$ حل کړئ.

**حل**:

$$\frac{5\tan 2x}{7x}=\frac{5\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}{7x}=\frac{5\sin 2x}{7x\cos 2x}=\frac{5\cdot 2x\frac{\sin 2x}{2x}}{7x\cos 2x}=\frac{10\frac{\sin 2x}{2x}}{7\cos 2x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5\tan 2x}{7x}=\frac{10}{7}\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}}{\lim\limits_{x\to 0}\cos 2x}=\frac{10}{7}$$

**دريم مثال**: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}$ حل کړئ.

**حل**: پوهېږو چې $1-\cos 2x=2\sin^2 x$ سره دی، نو:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin x=2\cdot 1\cdot 0=0$$

**خلورم مثال**: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x}$ پيدا کړئ:

**حل**:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{\cos 3x}}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3x\frac{\sin 3x}{3x}}{\cos 3x}}{5x\frac{\sin 5x}{5x}}=\frac{3x}{5x}\frac{\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}{\lim\limits_{x\to 0}\cos 3x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}}=\frac{3}{5}\frac{\frac{1}{1}}{1}=\frac{3}{5}$$

**پنځم مثال**: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos 6x}{x^2}$ په لاس راوړئ.

**حل**: پوهېږو چې $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ نو:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{4x+6x}{2}\sin\frac{4x-6x}{2}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 5x\sin(-x)}{x^2}=-2\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{x}$$

که $y = 5x$ سره وي، او $x \to 0$ نو $y \to 0$ کوي، نو:

$$= 10\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 10\cdot 1\cdot 1 = 10$$



## پوښتني

لاندې لیمیټونه محاسبه کړئ.

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x+\frac{\pi}{6})}{x+\frac{\pi}{6}}$ 2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}$ 3) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\tan^2 x}$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x}$ 5) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 3x}$ 6) $\lim_{x\to 0}\sin 5x\cos 3x$

7) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan(2x-1)}{4x^2-1}$ 8) $\lim_{x\to 0}\sqrt{\cos 2x - \cos x + 1}$ 9) $\lim_{x\to 1}(\cos^2 x + \sin^2 x)$

## د تابع ګانو متمادیت

## *Continuity of functions*




شکلونو ته پام وکړئ.

لومړی او دویم پلونه یو له بل څخه څه توپیر لري، خپل نظر بیان کړئ.

د تابع ګانو ګرافونه مختلف شکلونه لري چې ځینې یې په یوه قلم پرته له دې چې د قلم څوکه له کاغذ څخه پورته شي رسمېږي، متصلې یا متمادي تابع ګانې بلل کېږي او ځینې یې په یوه قلم نه شي رسمېدلای یعنې د رسم په وخت کې باید د قلم څوکه یو ځل یا څو ځلې د کاغذ څخه پورته شي، ځکه په یوه برخه کې یې ګراف غوڅ وي، دغه ډول تابع ګانې په نوموړی ټکي کې غیر متصلې یا غیر متمادي تابع ګانې بلل کېږي.




- د $f(x)=x^2+4x$ تابع ګراف رسم کړئ.
- د $f(x)$ د تابع لیمیټ د $x=1$ په نقطه کې پیدا کړئ.
- د $f(x)$ د تابع قیمت د $x=1$ په نقطه کې پیدا او وروسته دواړه اړیکې سره پرتله کړئ.

له پاسني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

**پایله**: د $y=f(x)$ تابع د $x=a$ په ټکي کې متمادي بلله کېږي چې لاندې شرطونه په کې صدق وکړي.

1- د $f(x)$ تابع د $a$ په ټکي کې تعریف شوي وي.

2- راکړل شوي تابع د $a$ په ټکي کې لیمیټ ولري.

3- د $f(a)$ قیمت باید د $f(x)$ له لیمیټ سره مساوي وي: $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

**لومړی مثال**: وښیئ چې د $f(x)=x^2+2x-1$ تابع د $x_0=2$ په ټکي کې متمادي ده.

**حل**:څرنګه چې د تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي، نو د متمادیت له شرطونو څخه لیکلای شو:

$$\left.\begin{array}{l}1)\ \ 2\in Dom\ f(x)=IR\\ 2)\ \ \lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x-1)=4+4-1=7\\ 3)\ \ f(2)=2^2+4-1=7\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=f(2)=7$$

څرنګه چې د متمادیت دري واړه شرطونه په کې حقیقت لري، بناءً تابع متمادي ده.

**دویم مثال**: د $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ د تابع متمادیت د $x_0=-1$ په ټکي کې وڅېړئ.

**حل**: د $f(x)$ د تابع د تعریف ساحه عبارت ده، له: $IR\setminus\{-1\}$

او $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x-1}{x+1}=\dfrac{-3}{0}=\infty$ سره دی.

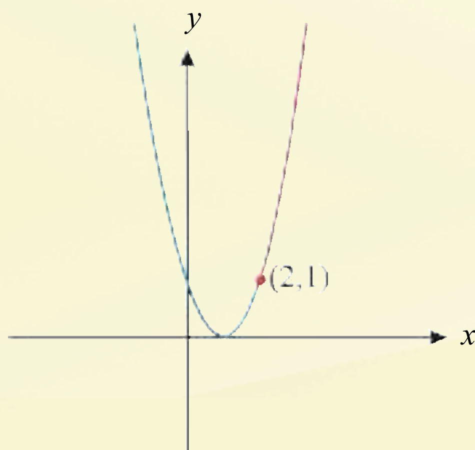
څرنګه چې لیدل کېږي $-1$ د تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دی، بناءً نوموړی تابع د $-1$ په ټکي کې متمادي نه ده.

**دریم مثال**: د $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+1 & ;\ x<2\\ x^2-3 & ;\ x\geq 2\end{cases}$ د تابع متمادیت د $x=2$ په ټکي کې وڅېړئ.

**حل**: لومړی د تابع د ښي او کیڼې خوا لیمیټونه څېړو:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2-3)=1\\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-2x+1)=1\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x)\quad\Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$$

په پایله کې ویلای شو چې تابع په نوموړي ټکي کې متمادي ده، لکه چې په شکل کې لیدل کېږي.



**څلورم مثال**: که $f(x)=\begin{cases}2x+1 & ; x\geq 1\\ 1-x & ; x<1\end{cases}$ وي، نو د $x=1$ په ټکي کې د تابع متمادیت وڅېړئ.

**حل**:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1-x=0\\ f(1)=0\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 2x+1=3\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 1-x=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 1^+} f(x)\neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

نو تابع په $x=1$ کې غیر متمادي ده.

**پایله**: که چېرې د $g(x)$ تابع د $x=a$ په ټکي کې $f(x)$ په $x=g(a)$ کې متمادي وي، نو $f(g(x))$ په $x=a$ کې هم متمادي ده، یعنې:

$$\lim_{x\to a} f(g(x))=f(\lim_{x\to a} g(x))=f(g(a))$$

1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{\alpha}=(\lim\limits_{x\to a} f(x))^{\alpha} \quad , \quad \alpha\in IR$

2) $\lim\limits_{x\to a} a^{f(x)}=a^{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$

3) $\lim\limits_{x\to a}\log_a f(x)=\log_a(\lim\limits_{x\to a} f(x))$

4) $\lim\limits_{x\to a}\sin f(x)=\sin(\lim\limits_{x\to a} f(x))$

**پنځم مثال**: که $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$ وي او $x\neq -3$ وي.

آیا د $f(x)$ تابع د $x=-3$ په ټکي کې متمادي ده؟

**حل**: ځرنګه چې تابع د $x=-3$ په نقطه کې نه ده تعریف شوې یا په بل عبارت د $-3$ عدد د تابع د تعریف په ساحه کې نه دی شامل، نوله دې امله تابع د $x=-3$ په ټکي کې متمادي نه ده.

**غیر متمادیت**: که چېرې د $f(x)$ تابع په $x=a$ کې یو له لاندې درې شرطونو څخه و نه لري وایو چې $f$ په $a$ کې غیر متمادي ده او $a$ یې د انفصال ټکی دی. انفصال په درې ډوله دی.

**لومړی ډول**: د $f$ تابع د $a$ په ټکي کې د ښي او کیڼ لوري لیمیټونه ولري، خو مساوي نه وي.

**دویم ډول**: کم تر کمه یو له دوو لیمیټونو(د ښي او کیڼ لوري لیمیټونه) څخه موجود نه وي.

**دریم ډول**: که چېرې تابع د $a$ په ټکي کې لیمیټ ولري، خو $a$ د $f$ د تعریف په ساحه کې شامل نه وي.(یوازې یو خالي ټکی وي.)

## پوښتني

په ورکړ شویو ټکو کې د تابع متمادیت وڅیړئ.

a) $f(x)=x^2+5(x-2)^7 \quad ; \quad x=3$

b) $f(x)=\dfrac{x+3}{(x^2+2x-5)} \quad ; \quad x=-1$

c) $h(x)=\dfrac{\sqrt{8-x^2}}{2x^2-5} \quad ; \quad x=-2$

d) $f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^3} \quad ; \quad x=3$

e) $f(x)=|x-3| \quad ; \quad x=3$

f) $g(x)=\dfrac{|x|}{x} \quad ; \quad x=0$

g) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3+x}{x} & ; \quad x\neq 0 \\ 3 & ; \quad x=2 \end{cases}$

h) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3} \quad ; \quad x=2$

## د متمادي تابع‌گانو خاصیتونه

د مخامخ مساواتو په اړه سوچ وکړئ چې حقیقت لري او که نه؟

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$
$$(f \div g)(x) = f(x) \div g(x) \quad , \; g(x) \neq 0$$




- که $f(x) = x^2 - 1$ وي د تابع متمادیت وڅېړئ.
- که $g(x) = x + 3$ وي د تابع متمادیت وڅېړئ.
- د $f(x) + g(x)$ د تابع‌گانو متمادیت وڅېړئ.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

**پایله**: که د $f(x)$ او $g(x)$ تابع‌گانې د $x = c$ په ټکي کې متمادي وي، نو له لاندې تابع‌گانو څخه یې هره یوه په $x = c$ یا یوه انټروال کې متمادي ده.

1- د تابع‌گانو جمع $\quad f(x) + g(x)$

2- د تابع‌گانو تفریق $\quad f(x) - g(x)$

3- د تابع‌گانو ضرب $\quad f(x) \cdot g(x)$

4- د تابع‌گانو تقسیم $\quad \dfrac{f(x)}{g(x)} \; ; \; g(x) \neq 0$

**لومړی بېلګه**: **که** $f(x) = x^2 + 3$ **او** $g(x) = x^2 + 3x - 2$ **وي، نو:**

1- $f$ او $g$ د $x = 1$ په ټکي کې متمادي دي او که نه؟

2- وڅېړئ چې:

الف) $f(x) + g(x) = (f + g)(x)$ وي.

ب) $f(x)\cdot g(x)=(f\cdot g)(x)$ د $x=1$ په نقطه کې متمادي ده او که غیر متمادي.

**حل**:لومړی هره یوه تابع بېلابېله څېړو چې متمادي ده که نه؟

1) $Df(x)=IR$

2) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+3)=4$

3) $f(1)=(1^2+3)=4$

**نو د** $f$ **تابع د** $x=1$ په نقطه کې متمادي ده.

1) $D\,g(x)=IR$

2) $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+3x-2)=1^2+3\cdot 1-2=2$

3) $g(1)=(1^2+3\cdot 1-2)=2$

په همدې شان د $g$ تابع د $x=1$ په ټکي کې هم متمادي ده.

2- اوس د تابع گانو د جمعې او ضرب د حاصل متمادیت څېړو:

**الف**)

$f(x)+g(x)=x^2+3+x^2+3x-2=2x^2+3x+1$

1) $D(f(x)+g(x))=IR$

2) $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x\to 1}(2x^2+3x+1)=6$

3) $f(1)+g(1)=(1+3+1+3-2)=6$

$\lim\limits_{x\to 1}[f(x)+g(x)]=f(1)+g(1)=6$

$(f+g)(x)=x^2+3+x^2+3x-2=2x^2+3x+1$

1) $D[(f+g)(x)]=IR$

2) $\lim\limits_{x\to 1}[(f+g)(x)]=\lim\limits_{x\to 1}[2x^2+3x+1]=6$

3) $(f+g)(1)=(2x^2+3x+1)(1)=6$

$\lim\limits_{x\to 1}[(f+g)(x)]=(f+g)(1)=6$

په پایله کې د متمادي تابع گانو د جمعې حاصل د $x=1$ په نقطه کې متمادي دی.

ب)

$$f(x)\cdot g(x)=(x^2+3)(x^2+3x-2)=x^4+3x^3+x^2+9x-6$$

1) $D(f\cdot g)(x)=IR$

2) $(f\cdot g)_{(1)}=1^4+3\cdot1^3+1^2+9\cdot1-6=8$

3) $\lim\limits_{x\to1}(f\cdot g)(x)=8$

$\lim\limits_{x\to1}(f\cdot g)(x)=(f\cdot g)(1)=8$

په پایله کې د متمادي تابع ګانو د ضرب حاصل د $x=1$ په نقطه کې متمادي ده.

**دویمه بېلګه**: که $g(x)=3x-2$ او $f(x)=x+1$ وي، وڅېړئ چې آیا $f(x)\cdot g(x)$ د $x=2$ په نقطه کې متمادي ده؟

**حل**:

1) $Df(x)=IR$

2) $\lim\limits_{x\to2}f(x)=\lim\limits_{x\to2}(x+1)=3$

3) $f(2)=x+1=3$

$\lim\limits_{x\to2}f(x)=f(2)=3$

1) $Dg(x)=IR$

2) $\lim\limits_{x\to2}g(x)=3x-2=3\cdot2-2=4$

3) $g(2)=3x-2=3\cdot2-2=4$

$\lim\limits_{x\to2}g(x)=g(2)=4$

$$f(x)\cdot g(x)=(x+1)(3x-2)=3x^2-2x+3x-2=3x^2+x-2$$

$D(f\cdot g)(x)=IR$

$\lim\limits_{x\to2}[f(x)\cdot g(x)]=3(4)+2-2=12$

$(f\cdot g)(2)=3(4)+2-2=12$

$\lim\limits_{x\to2}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=(f\cdot g)(2)=12$

په پایله کې لاس ته راځي چې $f(x)\cdot g(x)$ د $x=2$ په ټکي کې متمادي ده.

## پوښتنې

1- وښیئ چې لاندې تابع ګانې په ورکړ شویو نقطو کې متمادي دي او که نه؟

1) $f(x) = x^3 - 2(x+1)^5 \quad ; \quad x = 2$

2) $g(x) = \dfrac{x^2+3}{(x^2-x+5)(x^2+2x)} \quad ; \quad x = -1$

3) $h(x) = \dfrac{x\sqrt{x}+1}{(x+2)^3} \quad ; \quad x = 4$

2- تشریح کړئ چې ولې د $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2}}{x}$ تابع په $x = 0$ کې غیرمتمادي ده.

## د ځیرکي مهم ټکي

**د متحول تقرب**: ویل کېږي چې د $x$ متحول د $a$ عدد ته تقرب کوي، په داسې حال کې چې $x$ په اختیاري ډول د $a$ عدد ته نژدې کېږي، یعنې د $x$ او $a$ ترمنځ تفاوت له هر کوچني عدد( $\delta > 0$ ) څخه کوچني دی یا په لاندې ډول:

$\forall \delta > 0 : |x-a| < \delta$ یا $x \to a$ یا $|x-a| \to 0$

**له ښي لوري د متحول تقرب**: ( $x \to a^+$ ) که چېرې د $x$ د قیمتونو یو متناقص ترادف موجود وي، په داسې حال کې چې په تدریجي ډول د $a$ اختیاري عدد ته نژدې شي.

$x: a+0.1,\ a+0.01\ ,\ a+0.001\ ,\ a+0.0001\ ,\ \ldots \to a^+$

**له کیڼ لوري د متحول تقرب**: ( $x \to a^-$ ) که چېرې د $x$ د قیمتونو یو متزاید ترادف موجود وي، په داسې حال کې چې $x$ په تدریجي ډول د $a$ اختیاري عدد ته نژدې شي.

$x: a-0.1,\ a-0.01\ ,\ a-0.001\ ,\ a-0.0001\ ,\ \ldots \to a^-$

نو د $x$ د متحول تقرب د $a$ عدد ته معادل دی د $x$ د متحول تقرب له ښي لوري او د $x$ د متحول تقرب له چپ لوري؛ یعنې:

$x \to a \iff (x \to a^+\ ,\ x \to a^-)$

**تعریف**: که چېرې د $f(x)$ تابع په یوه غیر تړلي انټروال کې چې د $a$ عدد په هغې کې شامل وي کېدای شي چې تابع په $a$ کې نه وي تعریف شوی. که چېرې د $x$ متحول د $a$ عدد ته نژدې شي، نو د $f(x)$ تابع د $l$ عدد ته نژدې کېږي، نو ویل کېږي چې د $f(x)$ د تابع لیمیټ عبارت له $l$ څخه دی، کله چې د $x$ متحول د $a$ عدد ته تقرب وکړي، نو داسې یې لیکو: $\lim_{x\to a} f(x) = l$ یا $\begin{matrix} x \to a \\ f(x) \to l \end{matrix}$

**د لیمیټ ځانګړتیاوې**: که $f$ او $g$ دوې تابع ګانې وي، $C,L$ او $M$ حقیقي عددونه وي، داسې چې $\lim_{x\to c} f(x) = L$ او $\lim_{x\to c} g(x) = M$، نو لاندې رابطې لیکلای شو:

1) $\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) = L+M$

2) $\lim_{x\to c}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x) = L-M$

3) $\lim_{x\to c}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x) = L\cdot M$

4) $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)} = \frac{L}{M}\ ,\quad M \neq 0\ ,\quad g(x) \neq 0$

5) $\lim_{x\to c} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x\to c} f(x)} = \sqrt{L}$

**بې نهایت کوچنی تابع ګانې**: د $\varepsilon(x)$ تابع کله چې $x \to a$ ته نژدې شي، بې نهایت کوچنی بللې کېږي، که چېرې $\lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0$ وي.

**د ساندویچ قضیه**: که چېرې د $g(x), f(x)$ او $h(x)$ تابع ګانې د هر $x$ لپاره په یوه غیر ترلي انټروال کې چې د $a$ عدد په کې شامل دی(ولو که $x \neq a$) او $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ شرط صدق وکړي په هغه صورت کې چې $\lim_{x\to a} f(x)=b=\lim_{x\to a} h(x)$ وي، نو $\lim_{x\to a} g(x)=b$ دی.

- که چېرې یوه تابع د $\frac{0}{0}$ مبهمه بڼه ولري، د لېمیټ د پیداکولو لپاره یې لومړی تابع د تجزیې په مرسته ساده کوو او بیا یې لېمیټ په لاس راوړو.
- د $f(x)=\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ ...\ +a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ ...\ +b_n}$ د تابع د لېمیټ د پیداکولو لپاره چې $x\to\infty$ وکړي، عبارت دی له:

1. د $m=n$ لپاره د نوموړي کسر لیمیټ عبارت دی له $\frac{a_0}{b_0}$
2. د $m<n$ لپاره د نوموړي کسر لیمیټ عبارت له صفر څخه دی.
3. د $m>n$ لپاره د نوموړي کسر لیمیټ عبارت دی له $\pm\infty$

- د هغو تابع ګانو چې $(\infty-\infty)$ او $(0\cdot\infty)$ بڼه ولري د لېمیټ د پیداکولو لپاره یې د کسرونو د جمعې، ضرب او مزدوج څخه ګټه اخلو، تر څو د $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه غوره کړي چې وروسته یې لېمیټ په لاس راوړو.
- هغه تابع ګانې چې د $1^\infty$ مبهم شکلونه لري له دې فورمول څخه $P=\lim_{x\to a}[v(u-1)]$ , $\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)} \overset{1^\infty}{=} e^P$ یې د لېمیټ د پیداکولو لپاره کار اخلو.
- لاندې رابطه کله چې $\theta\to 0$ وکړي همېشه سمه ده.

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

- د $y=f(x)$ تابع د $x=a$ په ټکی کې متمادي بلل کېږي، کله چې:

1. $a$ د $f(x)$ د تابع په دومین کې شامل وي.
2. راکړل شوی تابع د $a$ په نقطه کې لېمیټ ولري.
3. $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

## د لومړي څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب يې په نښه کړئ.

-1 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x-\sin x}{x}$

a) 2 b) -2 c) 1 d) 3

-2 $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x^2+x-2}$

a) $-\frac{5}{3}$ b) $\frac{5}{3}$ c) 0 d) 1

-3 $\lim\limits_{x\to 1.4}(2x+0.3)$

a) 1 b) 3 c) 0 d) هيڅ يو

-4 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 2x}$

a) 1 b) 0 c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{2}{3}$

-5 $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

a) $2+\sqrt{2}$ b) 2 c) $\sqrt{2}$ d) 4

-6 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{1+\cos 2x}$

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ d) 4

-7 لاندې لېميټونه پيدا کړئ.

1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-2x+5}{2x^2+1}$

2) $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{3+x}$

3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{6}{x^2-7}$

4) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^4+x^2+x+6}{x^3-3x+4}$

5) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{3x^2-2}{x+1}$

6) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3+5x-18}{x^2+3x-10}$

7) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-2x-4}{x-\sqrt{3x-2}}$

8) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x-10}$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}$

10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\cos x}$

11) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{x^2-x-2}$

12) $\lim_{x\to -2}(\frac{x+3}{x+2}+\frac{2}{x^2+2x})$

13) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(a+x)+\sin(a-x)}{\tan(a+x)+\tan(a-x)}$

14) $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+2}$

15) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\sin x-\tan x}{x^2\sin x}$

16) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x+\sin^2 x}{a x^2}$

17) $\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x\sin x+\sin^2 x}{x^2}$

18) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$

19) $\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 3x\sin 2x}{x\tan 3x}$

20) $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+2}}+\frac{1}{\sqrt{x+2}}$

21) $\lim_{u\to 0}\frac{\sin 3(\pi+u)}{\sin 8(\pi+u)}$

22) $\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{\sin\pi x}$

23) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+3}{x^2-8x+5}$

24) $\lim_{x\to\infty}\frac{8x+4}{4x+\sqrt{x}}$

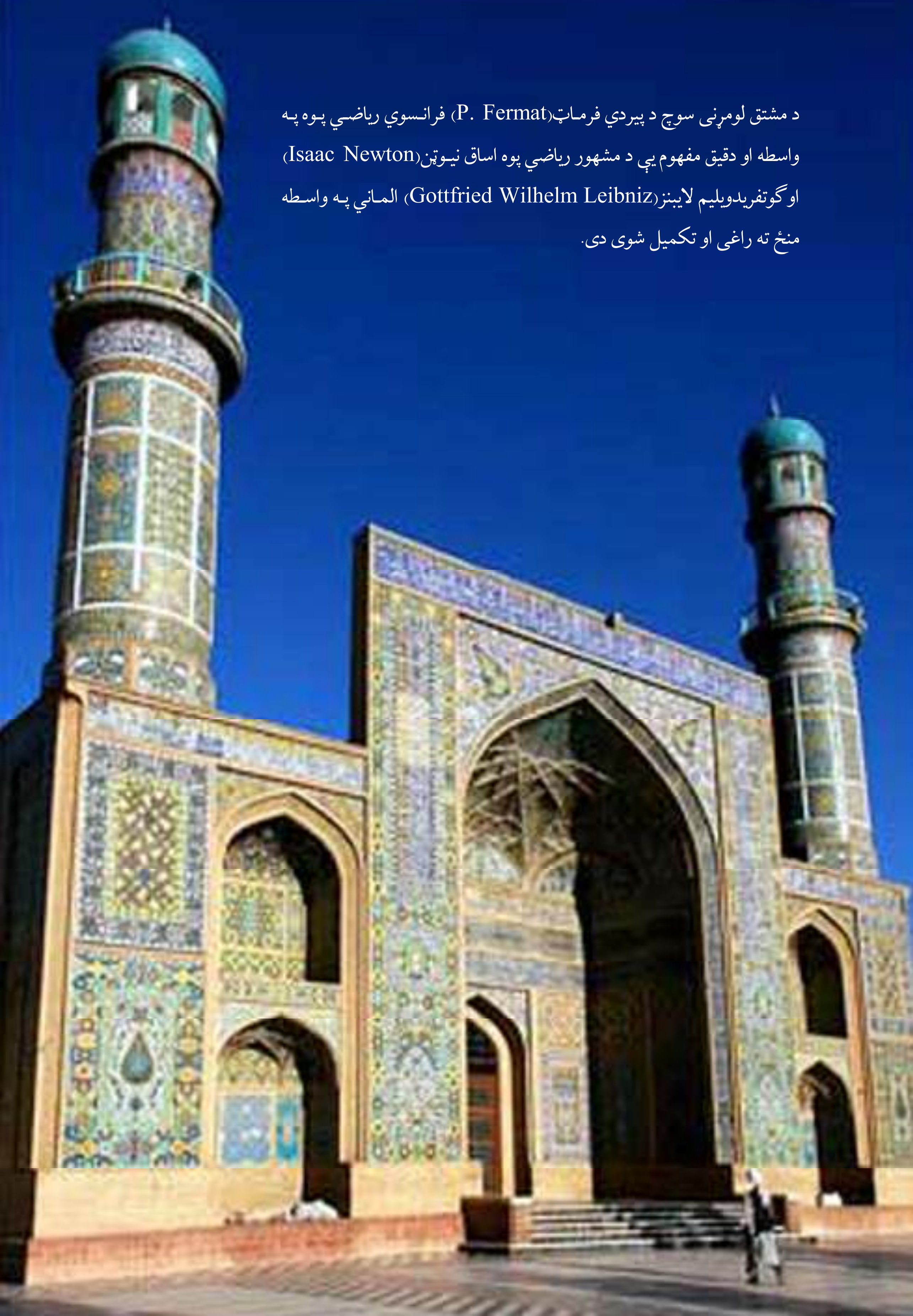
25) $\lim_{x\to 2}\frac{9x^2-x+5}{\sqrt{9x^4+1}}$

26) $\lim_{x\to 1}(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2})$



# دویم څپرکی

# مشتق



د مشتق لومړنی سوچ د پیردي فرماټ(P. Fermat) فرانسوي ریاضي پوه په واسطه او دقیق مفهوم یې د مشهور ریاضي پوه اساق نیوټن(Isaac Newton) او گوتفریدویلیم لایبنز(Gottfried Wilhelm Leibniz) الماني په واسطه منځ ته راغی او تکمیل شوی دی.

## مشتقات

Derivatives

د $f(x)=x^2-1$ تابع په پام کې ونيسئ د مخامخ کسر ليميټ پيدا کړئ.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=?$$

### د يوې منحني ميل

- که د يوه مستقيم خط دوه ټکي $A(x_1,y_1)$ او $B(x_2,y_2)$ معلوم وي، نو د دې مستقيم خط ميل له کومې رابطې څخه په لاس راځي.
- آيا د يوه مستقيم خط ميل ثابت او مساوي دي؟ که په يوه ځانګړې ټکي پورې اړه لري؟
- آيا د مستقيم خط ميل د هغې زاويې سره اړه لري چې مستقيم خط يې د $x$ د محور له مثبت لورې سره جوړوي؟
- آيا د مستقيم خط او منحني ميليونه يو شان پيدا کېږي؟

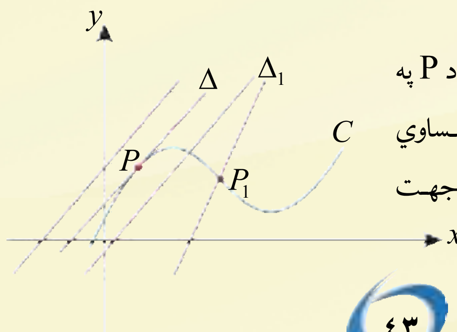
له پورتنيو پوښتنو څخه څرګندېږي چې د منحني ميل په اسانۍ سره نشو پيدا کولای، ځکه چې منحني خط په هر ټکي کې خپل مسير ته بدلون ورکوي او په مختلفو ټکو کې بېلابېل ميلونه لري، نو له دې کبله لومړی د يوه منحني خط ميل د هغه په يوه ټکي کې تعريفوو او بيا يې د محاسبې لپاره يو فورمول په لاس راوړو.




- د وضعيه کمياتو په مستوي کې د c منحني خط رسم او د P او $P_1$ دوه ټکي پرې وټاکئ.
- د $P_1$ په ټکي کې د $\Delta_1$ قاطع او د p په ټکي کې د $\Delta$ مماس رسم کړئ.
- که د $P_1$ ټکی د C په منحني باندې داسې حرکت وکړي چې د p ټکي ته نژدې شي، په پايله کې د $\Delta_1$ مستقيم خط له $\Delta$ مستقيم خط سره څه اړيکه پيدا کوي؟

د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:

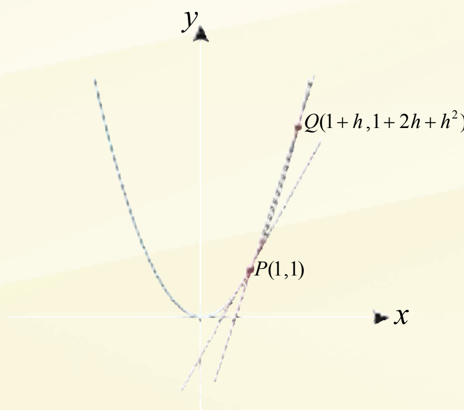
د $\Delta$ د مستقيم خط ميل چې د $C$ له منحني سره د P په نقطه کې مماس دی د هغې زاويې له (tan) سره مساوي دی چې مستقيم خط يې د $x$ د محور له مثبت جهت سره جوړوي.



**لومړی مثال**:د $y = f(x) = x^2$ له منحني سره د مماس میل د $P(1,1)$ په ټکي کې پیدا کړئ.

**حل**: څرنګه چې د منحني میل د مماس له میل سره د P په ټکي کې برابر دي، نو ددې مماس میل له هغه فورمول څخه چې دوې نقطې یې معلومې وي، نشو پیدا کولای، ځکه دلته یوازې د یوې نقطې مختصات ورکړل شوي دي. ولې کولای شو د دې مماس د میل تخمیني قیمت د هغه قاطع خط له میل څخه چې د P او Q له ټکو څخه تیریږي، پیدا کړو، په هغه صورت کې چې د Q ټکی د P ټکي ته نژدې شي د $PQ$ د مماس میل 2 ته تقرب کوي چې په لاندې جدول کې لیدل کیږي.

| $x$ | 2 | 1.5 | 1.1 | 1.01 | 1.001 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 4 | 2.25 | 1.21 | 1.0201 | 1.002001 |
| $m_{PQ}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ | 3 | 2.5 | 2.1 | 2.01 | 2.001 |




په عمومي ډول هغه لومړی مختصه چې د $P(1,1)$ ټکي ته نژدې ده په $1+h$ ښودلای شو چې h یو کوچنی مثبت یا منفي عدد دی، خو $h \neq 0$ دی نو لیکلای شو:

$$f(1+h) = (1+h)^2 = 1+2h+h^2$$

نو دا $(1+h \;,\; 1+2h+h^2)$ ټکی د منحني پر مخ راکړل شوی پروت دی، نو په پایله کې هغه مستقیم خط چې له $P(1,1)$ او $Q(1+h,1+2h+h^2)$ له ټکو څخه تیریږي، میل یې عبارت دی له:

$$m_{PQ}\frac{(1+2h+h^2)-1}{(1+h)-1} = \frac{2h+h^2}{h} = 2+h$$

که چیرې په شکل کې $h \to 0$ نو $Q \to P$ کوي، قاطع خط د $P(1,1)$ په نقطه کې مماس کیږي چې د همدې مماس میل ته د تابع مشتق وایي؛ یعنې: $\overline{PQ} = \lim_{h\to 0}(2+h) = 2$

د لېمیټ دا عملیه موږ ته دا امکان په لاس راکوي چې د $y = x^2$ د تابع د منحني میل په یوه اختیاري ټکي $P(x, y)$ کې په لاس راوړو. که د $Q$ د ټکي اختیاري مختصات $[x+h, (x+h)^2]$ وي او د $PQ$ میل ته $m$ او د $P$ په ټکي کې د مماس میل په $m_T$ سره وښیو لرو چې:

$$m = \frac{(x+h)^2 - x^2}{x+h-x} = \frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h} = \frac{2xh+h^2}{h} = 2x+h$$

$$m_T = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x$$

نو په عمومي بڼه لیکلای شو، که چیرې $Q[x+h \, , f(x+h)], \, P[x, f(x)]$ د نوموړي منحني دوې اختیاري نقطې وي، نو لاندې خارج قسمت چې د Newton د رابطې په نامه مشهور دی، لیکلای شو:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

په حقیقت کې دا د هغه مستقیم خط میل دی چې د $P$ او $Q$ له ټکو څخه تېرېږي.

او د منحني میل د هغې په هر اختیاري ټکي کې عبارت دی له:

$$m_T = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

**دویم مثال**: د $f(x) = x - x^2$ د منحني سره د مماس میل د $P(2,0)$ په ټکي کې پیدا کړئ.

**حل**: د Newton خارج قسمت تشکیل او د $x = 2$ په ټکي کې د منحني میل حسابوو:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = m_T = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(2+h)-(2+h)^2-2+2^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2+h-4-4h-h^2-2+4}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h-4h-h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(1-4-h)}{h} = \lim_{h\to 0}(-3-h) = -3$$

## منځنی یا وسطي تغیر

که یو جسم د یوه مستقیم خط پر مخ د حرکت په حال کې وي، طبیعي ده چې وهل شوی فاصله د زمان تابع ده یعنې $S = f(t)$ د $t_1$ او $t_2$ دوو وختونو خارج قسمت $\dfrac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$ د جسم د وسطي سرعت په نامه یادېږي او سرعت د $t_0$ په وخت کې عبارت له هغه حد یا لیمیټ څخه دی چې لحظوي سرعت بلل کېږي. $\lim_{t\to t_0}\dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$

د پورتنی رابطې لیمیټ د $t$ او $t_0$ په وخت کې داسې لیکو:

$$\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}=\lim_{t\to t_0}\frac{S-S_0}{t-t_0}=\frac{\Delta S}{\Delta t}$$

په پایله کې ویلای شو چې د تابع او متحول د زیاتوالي خارج قسمت ته متوسط تغییر وایي، یعنې:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$$

**مثال**: د $y=f(x)=x^2$ په تابع کې د $f$ متوسط تغیرات د $[2,5]$ په انټروال کې پیدا کړئ.

**حل**: څرنګه چې $x_1=2$ او $x_2=5$ دی، نو د تعریف په مرسته لیکلای شو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(5)-f(2)}{5-2}=\frac{5^2-2^2}{5-2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{25-4}{5-2}=\frac{21}{3}=7$$



## پوښتنې

1) د لاندې تابع ګانو د $x$ د متحول لپاره د $\Delta x$ او $\Delta y$ تزاید په پام کې نیولو سره $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ او میل یې په غوښتل شوو ټکو کې پیدا کړئ.

1) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=?$ , $f(x)=2x^2-4$ , $(0)$

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=?$ , $f(x)=2x-x^2$ , $(3)$

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=?$ , $f(x)=3x^2-5x+4$ , $(2,-1)$

2) د $f(t)=5t^3-3t+1$ د تابع متوسط تغییرات د $[2,4]$ په انټروال کې پیدا کړئ.

## د يوې تابع مشتق

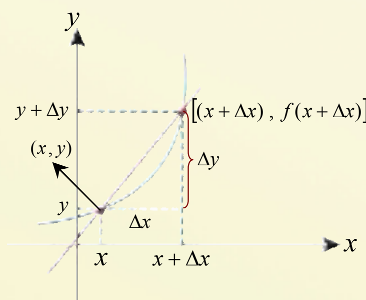
مخامخ لېمیټ څه را ښيي آیا په بل ډول يې لیکلای شو؟

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$




- که چېرې د $y=f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي، که د $x$ متحول د $\Delta x$ په اندازه زیاتوالی پیدا کړئ آیا تابع تزاید کوي په دې حالت کې، د متحول او تابع د زیاتوالي رابطه ولیکئ.
- د تابع تزاید د متحول پر تزاید $(\frac{\Delta y}{\Delta x})$ داسې ولیکئ چې په مساوات کې بدلون رانشي.
- که له دواړو خواوو څخه لېمیټ ونیول شي، په هغه صورت کې چې $\Delta x$ صفر ته تقرب وکړي، د دې حد یا لېمیټ د څه په نامه یادېږي؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:




$$y=f(x)$$
$$y+\Delta y=f(x+\Delta x)$$
$$\Delta y=f(x+\Delta x)-y$$
$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x) \quad / \quad \div \Delta x$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

**تعریف**: د تابع او مستقل متحول د تزاید د نسبت لېمیټ کله چې د مستقل متحول تزاید صفر ته تقرب وکړي د تابع مشتق بلل کېږي، لکه: $\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ او هغه په $f'(x)$ یا $y'$ , $\frac{df}{dx}$ , $\frac{dy}{dx}$ سره ښودل کېږي.

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}=y'=f'(x)$$

**لومړی مثال**: که $f(x)=2x$ وي، د دې تابع مشتق پیدا کړئ.

**حل**: د مشتق د تعریف څخه په ګټه اخیستنې سره لیکلای شو چې:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(x+\Delta x)-2x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x+2\Delta x-2x}{\Delta x}$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x}{\Delta x}\ \Rightarrow f'(x)=2$$

**دویم مثال**: د $f(x)=x^3$ د تابع مشتق پیداکړئ.

**حل**:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(3x^2+3x(\Delta x)+(\Delta x)^2)}{\Delta x}=3x^2+3x(0)+0^2\quad\Rightarrow\ f'(x)=3x^2$$

**دریم مثال**: د $f(x)=\sqrt{x}\ ,\quad x\geq 0$ مشتق پیداکړئ.

**حل**: مخکې له حل څخه $x\geq 0$ حالت په پام کې نیسو:

**الف**: که $x>0$ وي، نو د مشتق د تعریف په مرسته لیکو:

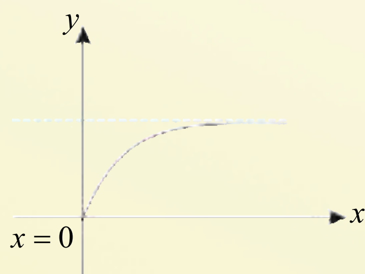
$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$$

صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}\quad\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

**ب**: که $x=0$ شي نو $\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$ موجود نه دی،




نو د $y=\sqrt{x}$ تابع د $x=0$ په ټکي کې د اشتقاق وړ نه ده لکه چې په شکل کې لیدل کېږي، یعنې که $x$ ډېر لوی شي، نو د مماس میل صفر ته نژدې کېږي او د $x=0$ په ټکي کې د مماس میل ډېر لویږي چې مماس په یوه عمود خط $(\frac{1}{2\sqrt{x}})$ بدلیږي.

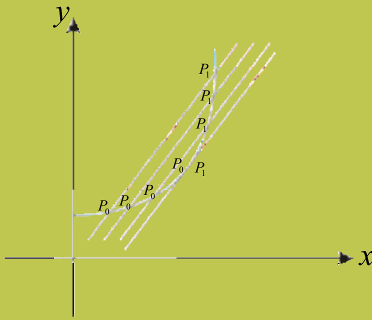


**پوښتنې**

دلاندې توابعو مشتق د تعریف په مرسته پیدا کړئ.

1) $f(x)=x-x^2$ 2) $f(x)=-2x^2$ 3) $f(x)=2x^2+x$

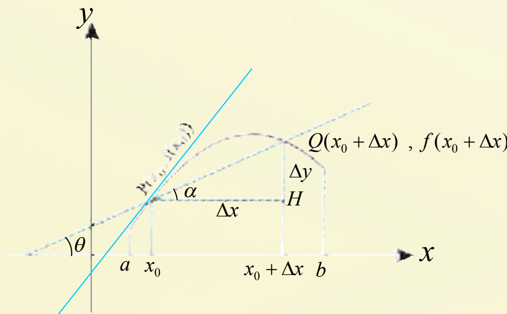
## د مشتق هندسي تعبير




په مخامخ شکل کې څه وینئ د هغه په اړه مناقشه وکړئ.




- د وضعیه کمیاتو په مستوي کې د $C$ منحني یا د $f(x)$ تابع داسې چې د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي ګراف یې رسم او د $P(x_0, f(x_0))$ او $Q(x_0+\Delta x\ ,\ f(x_0+\Delta x))$ ټکي د منحني پرمخ وټاکئ.
- د $\Delta$ مستقیم خط داسې رسم کړئ چې د منحني د $P$ او $Q$ له ټکو څخه تېر شي.
- آیا ویلای شئ چې د $\Delta$ مستقیم خط د $x$ د محور له مثبت جهت سره څه ډول زاویه جوړوي؟
- ووایئ چې د $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ یا $\frac{HQ}{HP}$ نسبت د څه په نامه یادیږي؟
- که د $Q$ ټکی د $P$ ټکي ته ډېر نژدې شي $(\Delta x \to 0)$، نو د $\Delta$ مستقیم خط په څه ډول کرښه بدلیږي په شکل کې یې وښیئ.
- د $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ لیمیټ کله چې $\Delta x \to 0$ وکړي، په $P(x_0, f(x_0))$ ټکي کې وڅیړئ.




د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

د $f(x)$ منحني د تابع مشتق، د $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې د مماس له میل سره برابر دی، یعني:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \tan\alpha = \tan\theta = m_\Delta$$

**تعریف**: د مماس میل د منحني د تماس په ټکي کې د تابع له مشتق څخه په هغه ټکي کې عبارت دی، یا په بل عبارت د هغې زاویې له ټانجنټ څخه عبارت دی چې د $\Delta$ مستقیم خط یې د $x$ د محور له مثبت جهت سره جوړوي.

**لومړی مثال**: د هغه مماس میل او معادله چې د $f(x)=2x^3-1$ په منحني د $A(1,1)$ په ټکي کې رسمېږي پیدا کړئ.

**حل**: پوهېږو چې $m=\tan\alpha=f'(x)$ دی، نو لیکلای شو چې:

$$f(x)=2x^3-1$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(x+\Delta x)^3-1-(2x^3-1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2[x^3+3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+(\Delta x)^3]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x^3+6x^2\Delta x+6x(\Delta x)^2+2(\Delta x)^3-1-2x^3+1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x[6x^2+6x\Delta x+2(\Delta x)^2]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}[6x^2+6x(\Delta x)+(\Delta x)^2]=6x^2$$

بناءً د مماس د میل قیمت د $A(1,1)$ په ټکي کې مساوي دی په: $m=f'(x)=f'(1)=6x^2=6\cdot 1^2=6$

نو د مماس معادله په لاندې ډول ده:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-1=6(x-1)\Rightarrow\quad y=6x-5$$

**دویم مثال**: د $y=x^2+1$ تابع د مماس د میل قیمت په $x_0=2$ ټکي کې په لاس راوړئ.

**حل**:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^2+1-(x_0^2+1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0^2+2(\Delta x)x_0+(\Delta x)^2+1-x_0^2-1}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+(\Delta x))=2x_0$$

$$m=y'=2x_0=2\cdot 2$$

$$y'=m=4$$

**دریم مثال**: د $y=f(x)=x^2$ تابع ورکړل شوې ده، غواړو د $x=x_0$ په ټکي او په ځانګړي توګه د $x_0=2$ په ټکي کې د تابع مشتق پیدا کړئ:

$$x=x_0$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0^2+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2x_0\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x(2x_0+\Delta x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x_0+\Delta x$$

اوس د لیمیټ د لاس ته راوړلو له لارې لیکلای شو: $f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x)=2x_0$



خرنگه چې $x_0=2$ دی، نو $f'(2)=2\cdot 2=4$ یعنې د $x_0=2$ په ټکي کې د $y=f(x)=x^2$ د تابع لومړی مشتق له 4 سره برابر دی. دا په دې معنا چې د مستقیم خط میل د $x_0=2$ په ټکي کې 4 دی.

**څلورم مثال**: د $f(x)=x^3$ تابع مشتق پیداکړئ.

**حل**:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)^3-{x_0}^3}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{{x_0}^3+3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-{x_0}^3}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x(3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x^2))}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x^2)$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x)^2)=3x_0^2$$

نو $f(x)$ د تابع مشتق د $x_0$ په ټکي کې برابر دی له: $f'(x_0)=3x_0^2$

**پنځم مثال**: د $x_0$ په ټکي کې د $f(x)=\frac{1}{x}$ تابع مشتق پیداکړئ.

**حل**:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f(x_0)=\frac{1}{x_0}$$

$$f(x_0)+\Delta y=\frac{1}{x_0+\Delta x}$$

$$\Delta y=\frac{1}{x_0+\Delta x}-f(x_0)$$

$$\Delta y=\frac{1}{x_0+\Delta x}-\frac{1}{x_0}$$

$$\Delta y=\frac{x_0-(x_0+\Delta x)}{x_0(x_0+\Delta x)}$$

د مساوات دواړه خواوې په $\Delta x$ وېشو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{x_0-x_0-\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{-\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-\Delta x}{\Delta x\cdot x_0(x_0+\Delta x)}\quad\Rightarrow\quad\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-1}{x_0(x_0+\Delta x)}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{x_0(x_0+\Delta x)}$$

$$f'(x_0)=\frac{-1}{x_0(x_0+0)}=\frac{-1}{x_0^2}$$

نو $f'(x_0)=-\frac{1}{x_0^2}$ د $x_0$ په ټکي کې د $f(x)$ تابع مشتق دی.



**پوښتنې**

1. په لاندې پوښتنو کې د تابع گانو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x)=5x^2-2$ 2) $f(x)=\dfrac{2}{x}$

2. **په ورکړل شویو ټکو کې د لاندې تابع گانو مشتق پیدا کړئ.**

1) $f(x)=4x^2 \quad , \quad x_0=\dfrac{1}{2}$ 2) $f(x)=3x-1 \quad , \quad x_0=-1$

## د مشتق قوانين

آیا کولای شئ چې د مخامخ تابع مـشتق پرتـه د تزایـد لـه لارې په بله طریقه پیدا کړئ؟

$$f(x)=2x^2$$

### 1- د یوه ثابت عدد مشتق:




د $y=C$ تابع( $C$ ثابت عدد) په پام کې ونیسئ.

- تابع ته د $\Delta x$ په اندازه تزاید ورکړئ، د تابع د تزاید په اړه څه فکر کوئ؟
- د تابع او متحول د تزاید نسبت تشکیل کړئ.
- د پورته مساواتو له دواړو خواوو لیمیټ ونیسئ په هغه صورت کې چې $\Delta x\to 0$ وکړي.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

د هرې ثابتې $f(x)=C$ تابع مشتق له صفر سره مساوي دی، ځکه چې د هرې ثابتې تابع ګراف یوه افقي کرښه ده چې میل یې صفر دی.

**ثبوت:**

$$y=C$$
$$y+\Delta y=C$$
$$\Delta y=C-y$$
$$\Delta y=C-C$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{C-C}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}$$
$$y'=0$$

**مثال:** د $f(x)=\pi^4$ او $y=100$ تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

**حل:** څرنګه چې $\pi^4$ او $100$ ثابت عددونه دي، نو:

$$f(x)=C \quad\Rightarrow\quad f'(x)=0$$
$$f(x)=\pi^4 \quad\Rightarrow\quad f'(x)=0$$
$$f(x)=100 \quad\Rightarrow\quad f'(x)=0$$

## 2- د يوې طاقت لرونکي تابع مشتق:




د $y = x^n$ تابع چې $n \in IR$ او $n \geq 1$ وي، په پام کې ونيسئ.

- متحول ته د $\Delta x$ په اندازه تزايد ورکړئ، آيا تابع هم تزايد کوي که تزايد کوي په کومه اندازه، اړيکه يې وليکئ؟
- له پورته اړيکې څخه د $\Delta y$ قيمت پيدا کړئ، د متحول او تابع د تزايد نسبت تشکيل کړئ.
- د پورته مساوات له اطرافو څخه په هغه صورت کې لېميټ ونيسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورته فعاليت پايله داسې ثبوتوو:

که چېرې $f(x) = x^n$ راکړل شوی وي، نو $f'(x) = nx^{n-1}$ سره کېږي.

**ثبوت:**

$$y = x^n$$

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n \quad \Rightarrow \quad \Delta y = (x + \Delta x)^n - y$$

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n$$

$$\Delta y = (x + \Delta x - x)[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} x + (x + \Delta x)^{n-3} x^2 + \ldots + x^{n-1}]$$

$$\Delta y = \Delta x[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} x + (x + \Delta x)^{n-3} x^2 + \ldots + x^{n-1}]$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} x + (x + \Delta x)^{n-3} x^2 + \ldots + x^{n-1}]}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} x + (x + \Delta x)^{n-3} x^2 + \ldots + x^{n-1}\right]$$

$$y' = \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \ldots + x^{n-1}}_{x^{n-1} \text{ ځلې } n}$$

$$y' = nx^{n-1}$$

**لومړی مثال:** د $f(x) = x^5$ تابع مشتق د $x = \frac{1}{2}$ په ټکي کې وټاکئ.

**حل:**

$$f(x) = x^5 \Rightarrow f'(x) = 5x^{5-1} \Rightarrow f'(x) = 5x^4$$

$$f(\frac{1}{2}) = 5 \cdot (\frac{1}{2})^4 = 5 \cdot \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$



**پوښتني**

د لاندې تابع گانو مشتق پيدا کړئ.

1) $f(x) = x^{-2}$ 2) $x(t) = gt^2$ 3) $t(x) = x^8$

4) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ 5) $f(x) = 10^{10}$

### 3- د حاصل جمع مشتق:




د $u$ او $v$ مشتق منوونکي تابع ګانې په پام کې ونیسئ.

- آیا د $y = u + v$ تابع د مشتق وړ ده؟
- د $y = u + v$ په تابع کې $u(x)$ ته د $\Delta u$ په اندازه او $v(x)$ ته د $\Delta v$ په اندازه تزاید ورکړئ، د $y$ د تزاید په اړه څه فکر کوئ؟ د هغې اندازه ولیکئ.
- لومړی د تابع تزاید پیدا او بیا د رابطې دواړه خواوې په $\Delta x$ وویشئ او وروسته یې لیمیټ په هغه صورت کې پیدا کړئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورته فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

**ثبوت**:

د یو حاصل جمع مشتق د حدونو د مشتقاتو د جمعې له حاصل سره مساوي ده:

$$y = u + v$$
$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v$$
$$\Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - y$$
$$\Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - u - v$$
$$\Delta y = \Delta u + \Delta v$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

خرنګه چې $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'$ او $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'$ دی، نو : $y' = u' + v'$

### 4- د حاصل تفریق مشتق

که $y = u - v$ وي، نو $y' = u' - v'$ دی.

ثبوت یې د زده‌کوونکو کورنی دنده ده.

**لومړی مثال**: د $y = 2x + 1$ تابع مشتق پیدا کړئ.

**حل**: لیدل کېږي چې $u = 2x$ او $v = 1$ دی، نو:

$$u' = 1 \cdot 2x^{1-1} = 2x^0$$
$$u' = 2$$
$$v' = 0$$



بناءً: $y'=u'+v' \Rightarrow y'=(2x)'+(1)' \Rightarrow y'=2+0 \Rightarrow y'=2$

**دویم مثال**: د $f(x)=4x^2-3x+5$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

**حل**: په دې تابع کې $u=4x^2$ , $v=3x$ او $w=5$ دی چې $u'=8x$ , $v'=3$ او $w'=0$ کېږي، نو:

$$y'=u'+v'+w'$$
$$y'=(4x^2)'-(3x)'+(5)'$$
$$y'=8x-3$$

**دریم مثال**: د لاندې تابعگانو مشتقونه پیدا کړئ:

**حل**:

1) $y=12x-7$
$y'=(12x)'-(7)'$
$y'=12$

2) $f(x)=9x^2-12x+4$
$f'(x)=(9x^2)'-(12x)'+(4)'$
$f'(x)=18x-12$

3) $f(x)=6x^3-2x^2+6x-1$
$f'(x)=(6x^3)'-(2x^2)'+(6x)'-(1)'$
$f'(x)=18x^2-4x+6$

## 5- د حاصل ضرب مشتق:




که د $u$ او $v$ توابع مشتق منونکي وي، نو $u\cdot v$ هم مشتق منونکي ده، د $y=u\cdot v$ تابع په پام کې ونیسئ.

- **په پورتنی تابع کې $u$ ته د $\Delta u$ په اندازه، $v$ ته د $\Delta v$ په اندازه تزاید ورکړئ او د تابع تزاید پیدا کړئ.**
- د $\Delta y$ د تزاید له پیدا کولو وروسته د مساوات اطراف په $\Delta x$ وویشئ.
- د پورتنی رابطې له دواړو خواوو څخه په هغه صورت کې لیمیټ ونیسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

له پورتني فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

**ثبوت**:

$$y=u\cdot v$$
$$y+\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v) \Rightarrow \Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)-y$$
$$\Delta y=u\cdot v+u\cdot\Delta v+v\cdot\Delta u+\Delta u\cdot\Delta v-u\cdot v$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{u\cdot\Delta v+v\cdot\Delta u+\Delta u\cdot\Delta v}{\Delta x}=v\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\frac{\Delta v}{\Delta x}+\Delta u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=v\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$y'=v\cdot u'+u\cdot v'+0\cdot v'$$
$$y'=u'v+v'u$$

**لومړی مثال**: د $y = x^3(x^2-3)$ د تابع مشتق پیدا کړئ؟

**حل**: پوهیږو چې $y = u\cdot v$ شکل لري چې په دې صورت کې $y' = uv' + vu'$ دی.

$$\left.\begin{array}{l} u = x^3 \Rightarrow u' = 3x^2 \\ v = x^2 - 3 \Rightarrow v' = 2x \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y' = u'v + v'u \\ y = x^3(x^2-3) \\ y' = 3x^2(x^2-3) + 2x(x^3) \\ y' = 3x^4 - 9x^2 + 2x^4 = 5x^4 - 9x^2 \end{array}$$

**دویم مثال**: د $y = (5x-1)^2$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

**حل**: د $y$ تابع کولای شو د فکتورونو د ضرب په شکل داسې ولیکو:

$$y = (5x-1)^2 = (5x-1)(5x-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} u = 5x-1 \Rightarrow u' = 5 \\ v = 5x-1 \Rightarrow v' = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y' = u'v + v'u \\ y' = 5(5x-1) + 5(5x-1) \\ y' = 25x - 5 + 25x - 5 = 50x - 10 \end{array}$$

## 6- د حاصل تقسیم مشتق:




که د $u$ او $v$ تابع ګانې مشتق منونکی وي، نو $\frac{u}{v}$ کله چې $v \neq 0$ وي، هم مشتق منوونکی ده، اوس د $y = \frac{u}{v}$ تابع په پام کې ونیسئ.

- $u$ او $v$ ته په ترتیب سره د $\Delta u$ او $\Delta v$ په اندازه تزاید ورکړئ او د $y$ تابع تزاید پیدا کړئ.
- د مساوات دواړه خواوې په $\Delta x$ وویشئ.
- د پورتني رابطې له اطراف څخه په هغه صورت کې چې $\Delta x \to 0$ وکړي، لیمیټ ونیسي.

د پورتني فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

ثبوت:

$$y=\frac{u}{v} \Rightarrow y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} \Rightarrow \Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-y$$

$$\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{uv+v\cdot\Delta u-uv-u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)}$$

$$\Delta y=\frac{v\cdot\Delta u-u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{v\cdot\Delta u-u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)}}{\Delta x}=\frac{v\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}\right)=\frac{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v\cdot\lim\limits_{\Delta v\to 0}(v+\Delta v)}$$

$$y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$$

**لومړی مثال**: د $y=\frac{2+3x}{1-2x}$ تابع مشتق پيداکړئ.

**حل**: ليدل کيږي چې تابع د $\frac{u}{v}$ بڼه لري چې مشتق يې عبارت دی له:

$$\left.\begin{array}{l} u=2+3x \Rightarrow u'=3 \\ v=1-2x \Rightarrow v'=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y=\frac{u}{v} \Rightarrow y'=\frac{u'v-v'u}{v^2} \\ y'=\frac{3(1-2x)-[-2(2+3x)]}{(1-2x)^2} \\ =\frac{3-6x+4+6x}{(1-2x)^2}=\frac{7}{(1-2x)^2} \end{array}$$

**يادونه**: که چېرې وغواړو چې د يوې تابع مشتق په يوه ټاکلې نقطه لکه $x_0$ کې پيداکړو د تابع په مشتق کې ټاکلې قيمت وضع کوو چې په پايله کې د تابع مشتق په هغه نقطه کې لاس راځي، لکه:

**دويم مثال**: د $f(y)=\frac{2y^2-3}{1-3y}$ د تابع مشتق د $y=0$ په ټکي کې پيداکړئ:

**حل**: د تابع د حاصل تقسيم له مشتق څخه لرو:

$$\left.\begin{array}{l} u=2y^2-3 \Rightarrow u'=4y \\ v=1-3y \Rightarrow v'=-3 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} f'(y)=\frac{4y(1-3y)-[-3(2y^2-3)]}{(1-3y)^2}=\frac{4y-12y^2+6y^2-9}{(1-3y)^2} \\ f'(y)=\frac{-6y^2+4y-9}{(1-3y)^2} \\ f'(0)=\frac{-6(0)^2+4(0)-9}{(1-0)^2} \\ f'(0)=-9 \end{array}$$

**دریم مثال**: د $f(t)=\dfrac{-3}{2t-1}$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې تابع د $\dfrac{u}{v}$ بڼه لري، نو د $y=\dfrac{u}{v}$ له فورمول څخه په ګټه اخیستنې سره داسې عمل کوو:

$$\left.\begin{array}{ll} y=\dfrac{u}{v} & \Rightarrow y'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2} \\ u=-3 & \Rightarrow u'=0 \\ v=2t-1 & \Rightarrow v'=2 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(t)=\dfrac{0\cdot(2t-1)-2(-3)}{(2t-1)^2}=\dfrac{6}{(2t-1)^2}$$



## پوښتنې

د لاندې توابعو مشتق پیدا کړئ:

1) $f(x)=\dfrac{3}{5}x(x-2)$  2) $g(x)=(2x-3)(x-3)$  3) $f(x)=(2x-1)^2$

4) $f(t)=\dfrac{t^2}{1-2t}$  5) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2}$  6) $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

7) $f(x)=3x^5-5x^2$  8) $f(x)=7x+3$

## 7- د يوې جذرالمربع تابع مشتق:




د $y=\sqrt{x}$ تابع په پام کې ونيسي.

- د $y=\sqrt{x}$ تابع متحول ته د $\Delta x$ په اندازه تزايد ورکړئ د تابع تزايد پيدا کړئ.
- د لاس ته راغلي رابطې له دواړو خواوو څخه لېميټ په هغه صورت کې ونيسي چې $\Delta x\to 0$ وکړي.

د پورتني فعاليت پايله داسې ثبوتوو:

**ثبوت:**

$$y=\sqrt{x}\Rightarrow y+\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}$$
$$\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}$$

د مساوات د ښي اړخ صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$\Delta y=\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{x+\Delta x-x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\boxed{y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

**لومړی مثال:** د $f(x)=\sqrt{x}(x^2-1)$ د تابع مشتق پيدا کړئ.

**حل:** ليدل کېږي چې تابع د $u\cdot v$ بڼه لري، نو:

$$\left.\begin{array}{l} u=\sqrt{x}\Rightarrow u'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\ v=x^2-1\Rightarrow v'=2x \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l} f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x^2-1)+2x\cdot\sqrt{x} \\ f'(x)=\dfrac{x^2-1}{2\sqrt{x}}+2x\sqrt{x}=\dfrac{x^2-1+4x(\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}} \\ \qquad =\dfrac{x^2-1+4x^2}{2\sqrt{x}}=\dfrac{5x^2-1}{2\sqrt{x}} \end{array}$$

## 8- د $\sqrt{u}$ تابع مشتق




- که چېرې $y$ د $u$ او $u$ د $x$ تابع او مشتق منوونکي وي د $y$ اړیکه $u$ ته او $u$، $x$ ته څه فکر کوئ.
- د $u$ متحول ته د $\Delta u$ په اندازه تزاید ورکړئ د $\Delta y$ د تزاید په اړه څه فکر کوئ.
- د مساواتو له دواړه خواوو څخه لیمیټ ونیسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

$$y + \Delta y = \sqrt{u + \Delta u}$$
$$\Delta y = \sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u}$$

د مساوات د ښي اړخ صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$\Delta y = \frac{(\sqrt{u+\Delta u} - \sqrt{u})(\sqrt{u+\Delta u} + \sqrt{u})}{\sqrt{u+\Delta u} + \sqrt{u}}$$
$$\Delta y = \frac{u + \Delta u - u}{\sqrt{u+\Delta u} + \sqrt{u}}$$

د مساوات دواړه خواوې په $\Delta x$ وېشو او بیا د مساوات له دواړو خواوو څخه لیمیټ نیسو چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\sqrt{u+\Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\sqrt{u+\Delta u} + \sqrt{u}} \cdot \frac{1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta u \to 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}}{\sqrt{u+\Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$y' = \frac{u'}{\sqrt{u} + \sqrt{u}} = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

**د ویم مثال**: د $h(x) = (x^2 + x)\sqrt{x}$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

**حل**: د $y = u \cdot v$ او $y = \sqrt{x}$ د فورمولونو له مشتق څخه په ګټه اخیستنې سره لرو:

$$\left.\begin{array}{ll} u = x^2 + x & \Rightarrow u' = 2x + 1 \\ v = \sqrt{x} & \Rightarrow v' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} h'(x) = (2x+1)\sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x^2 + x) \\ h'(x) = 2x\sqrt{x} + \sqrt{x} + \dfrac{x^2 + x}{2\sqrt{x}} \\ h'(x) = \dfrac{4x^2 + 2x + x^2 + x}{2\sqrt{x}} = \dfrac{5x^2 + 3x}{2\sqrt{x}} \end{array}$$

**دریم مثال**: د $f(x)=(\sqrt[3]{x}-1)(x+3)$ تابع د مشتق قیمت په $x=8$ ټکي کې په لاس راوړئ.

**حل**: د $y=u\cdot v$ او $y=\sqrt[n]{u}$ تابع له مشتق څخه په ګټه اخیستنې سره لیکلای شو:

$$\left.\begin{aligned} u=\sqrt[3]{x}-1 &\Rightarrow u'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \\ v=x+3 &\Rightarrow v'=1 \end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{aligned} f'(x)&=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(x+3)+1(\sqrt[3]{x}-1) \\ f'(x)&=\frac{x+3}{3\sqrt[3]{x^2}}+(\sqrt[3]{x}-1) \end{aligned}$$

اوس د تابع مشتق د $x=8$ په نقطه کې پیداکوو:

$$f'(8)=\frac{8+3}{3\sqrt[3]{8^2}}+\sqrt[3]{8}-1=\frac{11}{12}+1=\frac{23}{12}$$



## پوښتنې

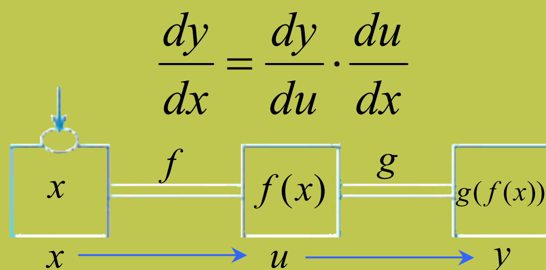
1- د لاندې توابعو مشتقونه پیداکړئ.

$$f(x)=\frac{1}{x+1} \quad , \quad y=3x^{-3} \quad , \quad f(x)=x^2+3$$

2- که $f(x)=x^2-3x$ او $g(x)=\sqrt{x}-1$ وي، د دې تابع ګانو د جمعې، ضرب او تقسیم مشتقونه پیدا کړئ. $[(f+g)',(f\cdot g)',(f\div g)' \quad g\neq 0]$

## د مرکبو تابع ګانو مشتق (زنځيري قاعده) Chain Rule

د مخامخ اړيکې او شکل په اړه خپل نظر بيان کړئ.







که چېرې y د u او u د x تابع وي او د اشتقاق وړ وي.

- ووایاست چې y د u او u له x سره څه اړيکه لري؟
- آيا د $\Delta y=\Delta y\cdot\frac{\Delta u}{\Delta u}$ مساوات حقيقت لري؟
- د پورتني مساوات دواړې خواوې په $\Delta x$ وويشئ.
- که د ښي اړخ د کسرونو د مخرجونو ځايونه بدل شي، په پورتني رابطه کې بدلون راځي؟
- د پورتني مساوات له اطراف څخه په هغه صورت کې لېميټ ونيسي چې $\Delta x\to 0$ وکړي.

د پورتني فعاليت پايله داسې ثبوتوو:

د تابع، تابع مشتق ثبوت او پايله يې په لاندې ډول ده.

**ثبوت:**

$$\Delta y=\Delta y\cdot\frac{\Delta u}{\Delta u}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta u}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

څرنګه چې $\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=y'_{(u)}$ او $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'_{(x)}$ دی، نو: $y'_{(x)}=y'_{(u)}\cdot u'_{(x)}$

د دې زنځيري قاعدې پر بنسټ لاندې پايلې ليکلای شو:

1- که $y=u^n$ وي؛ نو $y'=nu^{n-1}\cdot u'$ کېږي.

2- که $y=\sqrt[n]{u}$ وي، نو $y'=\dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$ کېږي.

**مثال**: د لاندې تابع گانو مشتق پيدا کړئ.

1) $y=(2x^2-1)^3$ 2) $y=\sqrt{1-x^2}$ 3) $y=(x^2-3)^2\cdot 2x^3$

4) $y=\sqrt[3]{x^2-2x^3}$ 5) $y=(x^2-2)^{-3}$

**حل**: د زنځيري قاعدې په مرسته ليکلای شو چې:

1) $y=\underbrace{(2x^2-1)^3}_{u}$

$$\left.\begin{array}{l} u=2x^2-1\Rightarrow u'_x=4x \\ y=u^3\Rightarrow y'_u=3u^2 \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l} y'_{(x)}=y'_{(u)}\cdot u'_{(x)} \\ y'=3(2x^2-1)^2\cdot 4x=3(4x^4-4x^2+1)\cdot 4x \\ \quad=(12x^4-12x^2+3)\cdot 4x=48x^5-48x^3+12x \\ \quad=12x(4x^4-4x^2+1)\quad=12x(2x^2-1)^2 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2)\ y=\sqrt{1-x^2} \\ u=1-x^2\ \Rightarrow\ u'_{(x)}=-2x \\ y=\sqrt{u}\Rightarrow y'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}} \end{array}\right\}\Rightarrow\quad y'=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

ليدل کېږي چې تابع د ضرب د حاصل بڼه لري، نو: $y=u\cdot v\ \Rightarrow\ y'=u'v+v'u$

$$\left.\begin{array}{l} 3)\ y=(x^2-3)^2\cdot 2x^3 \\ u=(x^2-3)^2 \\ u'_{(x)}=2(x^2-3)(2x) \\ v=2x^3\Rightarrow\ v'_{(x)}=6x^2 \end{array}\right\}\begin{array}{l} y'=\left[(x^2-3)^2\right]'\cdot 2x^3+\left[2x^3\right]'(x^2-3)^2 \\ y'=\left[2(x^2-3)\cdot 2x\right]2x^3+6x^2(x^2-3)^2 \\ \quad=8x^4(x^2-3)+6x^2(x^2-3)^2 \\ \quad=8x^6-24x^4+6x^2(x^4-6x^2+9) \\ \quad=8x^6-24x^4+6x^6-36x^4+54x^2 \\ \quad=14x^6-60x^4+54x^2 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 4)\ y=\sqrt[3]{x^2-2x^3} \\ u=x^2-2x^3 \\ u'_{(x)}=2x-6x^2 \end{array}\right\}\begin{array}{l} y=\sqrt[n]{u}\Rightarrow y'=\dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}} \\ y'=\dfrac{2x-6x^2}{3\sqrt[3]{(x^2-2x^3)^2}} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 5)\ y=(x^2-2)^{-3} \\ u=x^2-2 \\ u'_{(x)}=2x \end{array}\right\}\begin{array}{l} y=u^n\Rightarrow y'=nu^{n-1}\cdot u' \\ y'=-3(x^2-2)^{-4}\cdot 2x=\dfrac{-6x}{(x^2-2)^4} \end{array}$$

**يادونه**:

I. که چېرې د $f$ تابع د $(x_0)$ په ټکي کې مشتق ولري، نو $f'(x_0)$ د هغه مماس ميل دی چې د $((x_0)\ ,\ f(x_0))$ په نقطه کې له منحني يا د تابع له ګراف سره رسمېږي.

**مثال**: د $f(x)=x^3$ د تابع ميل د $x_0=1$ په ټکي کې پيدا کړئ.

**حل**: څرنګه چې $x_0=1$ دی، نو: $f(x_0)=1$ سره کېږي او $P(1,1)$ چې د تماس ټکی دی، ميل يې عبارت دی، له:

$$f'(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=3 \quad\Rightarrow\quad f'(1)=3$$

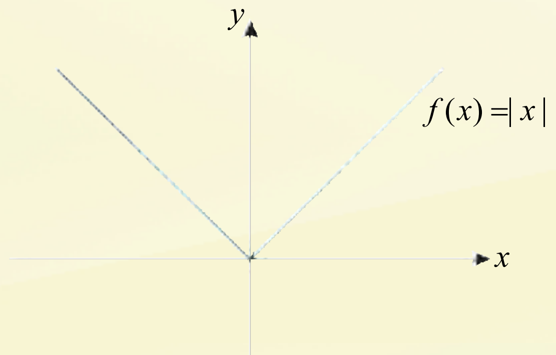
II. که د $f$ تابع د $x=x_0$ په ټکي کې د مشتق وړ وي، نو دا تابع د $x_0$ په ټکي کې متمادي ده، خو برعکس يې سم نه ده، يعنې کېدای شي، يوه تابع په يوه ټکي کې متمادي وي، ولې په هغه ټکي کې د مشتق وړ نه وي.

**مثال**: د $f(x)=|x|$ د تابع مشتق د په $x=0$ ټکي کې پيدا کړئ.

**حل**: پوهېږو چې مشتق په حقيقت کې د نيوټن د نسبت د لېميټ محاسبه ده چې د ښي او کيڼ اړخ لېميټونه يې په صفر کې سره وڅېړل شي.

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$$



لیدل کېږي چې $f'(0^+) \neq f'(0^-)$ دی، نو تابع په $x = 0$ کې د مشتق وړ نه ده، ولې تابع د صفر په ټکي کې متمادي ده.



## پوښتنې

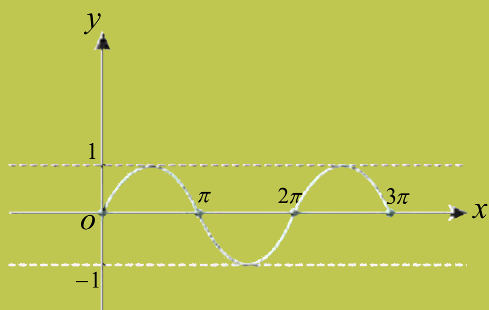
د لاندې توابعو مشتق پیدا کړئ.

1) $y = (x^2 + 2)^2$  2) $f(x) = (x^3 - 4x^2 + 1)^{-4}$  3) $y = (1 - 2x^3)^4$

4) $h(z) = \sqrt{\dfrac{1-z}{1+z}}$  5) $f(t) = \sqrt[3]{3t+1}$  6) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2 + x^2 + x^3}}$

## د مثلثاتي تابع ګانو مشتق

مخامخ ګراف څه ډول تابع را ښيي؟







- مثلثاتي دايره او راديان تعريف کړئ.
- آيا دا $-1 \le \sin x \le 1$ اړيکه حقيقت لري او که نه؟
- د $y = \sin x$ تابع په پام کې ونيسئ متحول ته د $\Delta x$ په اندازه بدلون ورکړئ او د تابع بدلون په پام کې ونيسئ.
- د $\sin(x+\Delta x) - \sin x$ مثلثاتي رابطې ته انکشاف ورکړئ؟
- د پورتنۍ رابطې له انکشاف څخه وروسته د $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ نسبت جوړ او د مساوات له دواړو خواوو څخه په هغه صورت کې لیمیټ ونيسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

له پورته فعالیت څخه پايله داسې ثبوتوو:

**1- د $y = \sin x$ تابع مشتق:**

**ثبوت:**

$$y = \sin x$$
$$y + \Delta y = \sin(x+\Delta x)$$
$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x$$
$$\Delta y = 2\cos\frac{x+\Delta x + x}{2}\cdot\sin\frac{x+\Delta x - x}{2} = 2\cos\frac{2x+\Delta x}{2}\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\cdot 2\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\cdot\sin\frac{\Delta x}{2} = 2\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\cdot\sin\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\sin\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \Rightarrow y'(x) = \cos x\cdot 1$$
$$y' = \cos x$$
$$\boxed{y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x}$$

که چېرې $f(x) = \sin u$ وي په داسې حال کې چې $u$ د $x$ تابع وي، نو ليکلای شو:

$$f(u)=\sin u \Rightarrow y'=u'\cos u$$

**لومړی مثال**: د $f(x)=\sin 4x$ تابع مشتق پیداکړئ.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\sin 4x \\ u=4x \Rightarrow u'=4 \\ f(x)=\sin u \Rightarrow y'_u=\cos u \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f(x)=\sin u \quad \Rightarrow f'(x)=u'\cos u \\ f(x)=\sin 4x \Rightarrow f'(x)=4\cos 4x \end{array}$$

**دویم مثال**: د $f(x)=x^3\cdot\csc x$ تابع مشتق پیداکړئ.

**حل**:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3\cdot\csc x=x^3\cdot\dfrac{1}{\sin x} \\ u=x^3 \Rightarrow u'=3x^2 \\ v=\dfrac{1}{\sin x} \Rightarrow v'=\dfrac{-uv'}{v^2}=\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f(x)=x^3\cdot\csc x \\ f'(x)=3x^2\cdot\csc x+\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}\cdot x^3 \\ \quad =3x^2\csc x-x^3\cot x\cdot\csc x\cdot x \\ \quad =3x^2\csc x-x^3\cot x\cdot\csc x \end{array}$$



**پوښتني**

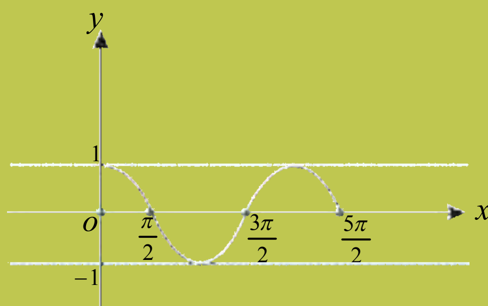
د لاندې توابعو مشتق په لاس راوړئ:

$a)\ y=\sin 5x$ $\qquad b)\ y=\dfrac{\sin x}{1+x}$

$c)\ y=\sqrt{1+\sin x}$

### د $y = \cos x$ تابع مشتق

مخامخ گراف څه ډول تابع را ښيي؟







- د $y = f(x) = \cos x$ په تابع کې متحول ته د $\Delta x$ او تابع ته د $\Delta y$ په اندازه تزاید ورکړئ.
- د $\cos(x + \Delta x) - \cos x$ مثلثاتي رابطې ته انکشاف ورکړئ.
- د پورتنی انکشافي رابطې په مرسته د $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ نسبت تشکیل او له اطرافو څخه لیمیټ ونیسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورتني فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

### 2- د $y = \cos x$ تابع مشتق

**ثبوت:**

$$y = \cos x$$

$$y + \Delta y = \cos(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x$$

$$\Delta y = -2\sin\frac{x + \Delta x + x}{2} \cdot \sin\frac{x + \Delta x - x}{2}$$

$$\Delta y = -2\sin\frac{2x + \Delta x}{2} \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0}\sin(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x \cdot 1$$

$$\boxed{y = \cos x \quad \Rightarrow \quad y' = -\sin x}$$

یا په لنډ ډول هغه داسې ثبوتوو:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$$
$$(\cos x)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\cdot(-2\sin x\cos x)$$

پوهېږو $\sqrt{1-\sin^2 x} = \cos x$ چې سره دی، نو:

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos x}(-2\sin x\cdot\cos x)$$
$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$$

که چېرې $y = \cos u$ وي، په داسې حال کې چې u د x تابع وي، نو لیکلای شو:

$$\boxed{y = \cos u \Rightarrow y' = -u'\cdot\sin u}$$

**لومړی مثال**: د لاندې توابعو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x) = \sin 2x = 2\sin x\cos x$ 2) $f(x) = x - \sin x\cos x$

**حل**: پوهېږو چې $y = u\cdot v \Rightarrow y' = u'\cdot v + v'u$ دی، نو:

1) $f(x) = \sin 2x = 2\sin x\cos x$

$$f'(x) = (2\sin x)'\cos x + (\cos x)'\cdot 2\sin x = 2\cos^2 x - 2\sin^2 x$$
$$f'(x) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) \Rightarrow y' = 2\cos 2x$$

2) $f(x) = x - \sin x\cos x$

$$f'(x) = (x)' - (\sin x\cdot\cos x)' = (x)' - [(\sin x)'\cdot\cos x + (\cos x)'\cdot\sin x]$$
$$f'(x) = (x)' - [\cos x\cos x + (-\sin x\sin x)] = 1 - \cos 2x$$

## پوښتنې

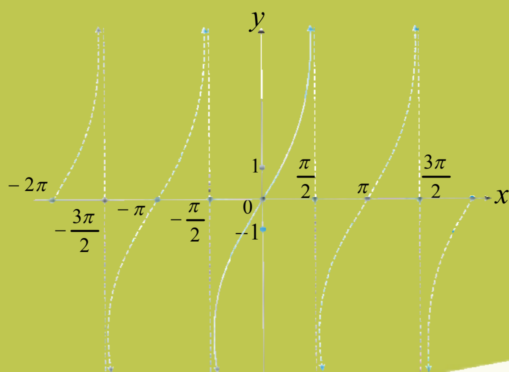
د لاندې تابع ګانو لومړی مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x) = (\sec 2x + \tan 2x)^2$ 2) $f(x) = \sin^2 x$ 3) $f(x) = \sec x$

4) $f(x) = \csc x$ 5) $f(x) = \dfrac{5\sin^2 2x}{3\cos 5x}$

**د $y = \tan x$ تابع مشتق**

مخامخ گراف څه ډول تابع راښيي.







- د $y = \tan x$ تابع د نسبت په شکل ولیکئ.
- له پورتني نسبت څخه مشتق ونیسئ، هغه له څه سره مساوي کېږي.

له پورته فعالیت څخه پایله داسې ثبوتوو:

**3- د $y = \tan x$ تابع مشتق:**

**ثبوت:**

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$f'(x) = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x)(\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y = \tan x$$

$$y'_{(x)} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

پاتې فورمولونه زده‌کوونکو ته پرېږدو.

**لومړی مثال:** د لاندې مثلثاتي تابع مشتق پیدا کړئ.

$$y = \tan^3 x$$

**حل:** پوهېږو چې که $y = u^n$ وي نو مشتق یې $y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$ سره دی، نو:

$$\left.\begin{array}{l} u = \tan x \\ u' = \sec^2 x \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y = \tan^3 x \\ y' = 3\tan^2 x \sec^2 x \end{array}$$

**دويم مثال**: د $y = \sec x \cdot \cot x$ تابع مشتق پيدا کړئ.

**حل**: څرنګه چې تابع د $y = u \cdot v$ شکل لري، نو:

$$y = \sec x \cdot \cot x$$
$$u = \sec x \quad \Rightarrow \quad u' = \sec x \tan x$$
$$v = \cot x \quad \Rightarrow \quad v' = -\csc^2 x$$

د $u', v, u$ او $v'$ قيمتونه د $y' = u' v + u \cdot v'$ په فورول کې وضع کوو:

$$y' = \sec x \tan x \cdot \cot x + \sec x(-\csc^2 x)$$
$$= \sec x \tan x \frac{1}{\tan x} - \csc^2 x \sec x$$
$$= \sec x - \csc^2 x \sec x$$



**پوښتنې**

د لاندې تابع ګانو مشتق پيدا کړئ.

$a)\ y = \tan x \cot x$

$b)\ y = (x^2 + x - 1) \tan^2 x$

$c)\ y = \dfrac{1}{\tan x}$

$d)\ y = \tan x \sec x - \cot x$

## ضمني مشتقات

مخامخ مساوات په عبارت سره ولیکئ.

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}$$




- د $y = 2x^2 - 4$ تابع مشتق پیدا کړئ.
- د $y^2 + xy = 1$ تابع څو متحوله تابع ده؟ ګراف یې څه ډول شکل لري؟
- د پورتني تابع مشتق پیدا کولای شئ.

د یوې منحنـي خـط معادلـه د وضـعیه کمیـاتو پـه سیـستم کـې عبـارت لـه $y = f(x)$ څخـه ده، لـه دی ځایـه $y - f(x) = 0$ کېـږي او $y - f(x)$ یـوه دوه متحولـه تـابع د $x$ او $y$ لـه جنـسه ده، کـه $F(x,y) = y - f(x)$ تابع په پام کې ونیسو، نو د دې منحني معادله د $F(x,y)$ شکل غوره کوي، د مثال په ډول: $F(x,y) = x^2 + y^2 - 25$ وي، نـو د $F(x,y) = 0$ لـه معـادلې څخـه لـیکلای شـو چې $x^2 + y^2 - 25 = 0$ یا $x^2 + y^2 = 25$ چې د دې دوو بېلا بېلو توابعو معادلې $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$ دي. په عمومي ډول د $F(x,y) = 0$ معادله کېدای شي چې د څو تابع ګانو معادله د $y = f(x)$ په بڼه وي، پاملرنه وکړئ.

د $y = f(x)$ په تابع کې چې x او y یو له بل څخه جلا وي، نو مشتق یې په آسانۍ پیدا کولای شو، ولې په ځینو رابطو کې y له x سره یو ځای بیان شوی دي لکه په $xy^2 - y + 1 = 0$ چې د مشتق په نیولو کې که د x له جنسه مشتق نیسو، نو y یو ثابت عدد فرضوو او که د y له جنسه مشتق نیسو x ثابت فرضوو، لکه:

$$xy^2 - y + 1 = 0$$

$$(xy^2)' - (y)' + (1)' = 0 \Rightarrow 1y^2 + x(2y'y) - y' = 0 \Rightarrow y^2 = -2xyy' + y' = y'(-2xy + 1)$$

$$y' = \frac{y^2}{-2xy + 1}$$

په عمومي حالاتو کې که تابع غیر صریح وي په دې معنا چې مستقل متحول او د تابع متحول یکې څرګند نه وي، نو ددې ډول تابع مشتق د ضمني مشتق په نامه یادیږي او د هغه مشتق په لاندې ډول محاسبه کوو.

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{\text{د تابع مشتق نظر } x \text{ ته(} y \text{ ثابت دی)}}{\text{د تابع مشتق نظر } y \text{ ته(} x \text{ ثابت دی)}}$$

**لومړی مثال**: د $y = \sin\frac{x}{y} + 1$ ضمني تابع مشتق د $(\pi, 1)$ په ټکي کې پیدا کړئ.

**حل**: د $y - \sin\frac{x}{y} - 1 = 0$ رابطې څخه $y'_{(x)} = \frac{-f'_{(x)}}{f'_{(y)}}$ پیدا کوو.

$$y - \sin\frac{x}{y} - 1 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} f'_{(x)} &= y'_x - (\sin\frac{x}{y})'_x - (1)'_x \\ &= 0 - \frac{1}{y}\cos\frac{x}{y} - 0 = \frac{-1}{y}\cos\frac{x}{y} \\ f'_{(y)} &= y'_y - (\sin\frac{x}{y})'_y - (1)'_y \\ &= 1 - \cos\frac{x}{y}(\frac{x}{y})'_y - 0 = 1 - \frac{-x}{y^2}\cdot\cos\frac{x}{y} = 1 + \frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y} \end{aligned}\right\} \Rightarrow y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{\frac{-1}{y}\cos\frac{x}{y}}{1 + \frac{x}{y^2}\cdot\cos\frac{x}{y}}$$

اوس په $y'_{(x)}$ رابطه کې د x او y قیمتونه وضع کوو چې د $y'(\pi, 1)$ په لاس راځي.

$$y'_{(\pi,1)} = \frac{\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}}{1 + \frac{x}{y^2}\cdot\cos\frac{x}{y}} = \frac{\frac{1}{1}\cos\pi}{1 + \frac{\pi}{1}\cos\pi} = \frac{-1}{1 + \pi(-1)} = \frac{1}{\pi - 1}$$

**دویم مثال**: د $x^2y + 2y^3 = 3x + 2$ رابطې ضمني مشتق پیدا کړئ.

**حل**:

$$x^2y + 2y^3 = 3x + 2$$

$$x^2y + 2y^3 - 3x - 2 = 0$$

$$f'_{(x)} = 2xy + 0 - 3 - 0 = 2xy - 3$$

$$f'_{(y)} = x^2 + 6y^2 - 0 - 0 = x^2 + 6y^2$$

$$f'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{2xy - 3}{x^2 + 6y^2} = \frac{-2xy + 3}{x^2 + 6y^2}$$

**دریم مثال**: د $y^6 - y - x^2 = 0$ تابع ضمني مشتق پیدا کړئ.

**حل**:

$$f'_{(x)} = -2x$$
$$f'_{(y)} = 6y^5 - 1$$
$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{-2x}{6y^5 - 1} = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

او یا په بله طریقه:

$$y^6 - y - x^2 = 0$$
$$6y^5 y' - y' - 2x = 0$$
$$(6y^5 - 1)y' = 2x$$
$$y' = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

## د تابع دویم ضمني مشتق

د ضمني رابطې د دویمې مرتبې د ضمني مشتق د پیدا کولو لپاره د فورمول په مرسته لومړی د ضمني اړیکې لومړی مشتق پیدا کوو او بیا له دې رابطې څخه مشتق نیسو.

**لومړی مثال**: د $x^2 - y^2 = 1$ رابطې دویمه ضمني مشتق $y''_{(x)}$ پیدا کړئ.

**حل**:

$$x^2 - y^2 = 1$$
$$x^2 - y^2 - 1 = 0$$
$$f'_{(x)} = (x^2)'_x - (y^2)'_x - (1)'_x = 2x - 0 - 0 = 2x$$
$$f'_{(y)} = (x^2)'_y - (y^2)'_y - (1)'_y = 0 - 2y - 0 = -2y$$
$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{2x}{-2y} = \frac{x}{y}$$

او یا به بله طریقه:

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{(x^2)'_x - (y^2)'_x - (1)'_x}{(x^2)'_y - (y^2)'_y - (1)'_y} = -\frac{2x - 0 - 0}{0 - 2y - 0} = \frac{x}{y} \Rightarrow y'_{(x)} = \frac{x}{y}$$

اوس د $y' = \frac{x}{y}$ له رابطې څخه دویم ضمني مشتق نیسو:

$$y''_{(x)} = \frac{(x)'y - y'x}{y^2} = \frac{y - y'x}{y^2} = \frac{y - \frac{x}{y} \cdot x}{y^2} = \frac{y^2 - x^2}{y^3} = \frac{-1}{y^3} \Rightarrow y''_{(x)} = \frac{-1}{y^3}$$

**دويم مثال**: د $x^2+xy+y^2-3=0$ په معادله کې د y مشتق نسبت x ته د $(1,1)$ په ټکي کې پیدا او پر منحني د مماس معادله ولیکي.

**حل**: څرنګه چې د $(1,1)$ ټکی په معادله کې صدق کوي، نو نوموړی ټکی د منحني پرمخ واقع دی، د $y'_{(x)}$ د پیداکولو لپاره په ورکړ شوي معادلې کې لیکلای شو:

$$f'_{(x)}=2x+y$$
$$f'_{(y)}=x+2y$$
$$y'_{(x)}=-\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}=-\frac{2x+y}{x+2y} \quad , \quad x+2y\neq 0$$
$$y'=-\frac{2x+y}{x+2y}=-\frac{2+1}{1+2}=-1$$
$$y-y_1=m(x-x_1) \Rightarrow y-1=-(x-1) \Rightarrow y=-x+2$$

او یا په بله طریقه هم کولای شو د تابع ضمني مشتق په لاس راوړو:

$$x^2+xy+y^2-3=0$$
$$2x+y+x\cdot y'+2yy'=0$$
$$2x+y+(x+2y)y'=0$$
$$(x+2y)y'+2x+y=0$$
$$(x+2y)y'=-2x-y$$
$$y'=\frac{-2x-y}{x+2y}$$

**دریم مثال**: د $x^2y^3=5y^3+x$ غیر صریح تابع ضمني مشتق پیدا کړئ.

**حل**:

$$x^2y^3-5y^3-x=0$$
$$f'_{(x)}=2xy^3-0-1=2xy^3-1$$
$$f'_{(y)}=3x^2y^2-15y^2-0$$
$$y'_{(x)}=-\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}=-\frac{2xy^3-1}{3x^2y^2-15y^2}=\frac{1-2xy^3}{3x^2y^2-15y^2}$$



**پوښتني**

1- د $x\sin y+y\cos x=5$ د غیر صریح تابع ضمني مشتق پیدا کړئ.

2- د $x^3+xy^2+y=3$ رابطې څخه ضمني مشتق ونیسئ.

3- د $x^2+y^2=4x+4y$ رابطې څخه ضمني مشتق ونیسئ.

## لوړ مرتبه يي مشتقات

د مخامخ تابع درېم ځلې مشتق ونيسئ؟

د مخامخ تابع پنځه ځلې مشتق ونيسئ؟

$$f(x)=\sin x$$
$$f(x)=\cos x$$




- د $y=2x^4-3x^3-2x-1$ تابع مشتق پيدا کړئ.
- د پورته تابع دويم مشتق پيدا کړئ.
- د پورتني مشتق د تابع درېم ځل مشتق ونيسئ.
- د پورتني تابع نور څو ځلې مشتق نيولی شو؟
- د پورتني تابع څووم مشتق له صفر سره مساوي دی؟

د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:

که د $y=f(x)$ مشتق منونکی وي، لومړی مرتبه مشتق يې په $y'=f'(x)$ ، دويمه مرتبه مشتق يې په $y''=f''(x)$ درېمه مرتبه مشتق يې په $y'''=f'''(x)$ ... په کلي ډول $n-$ام مرتبه مشتق د $y=f(x)$ تابع په $y^{(n)}=f^{(n)}(x)$ علامې سره ښيو.

**لومړی مثال**: د $f(x)=x^3-3x^2+4x-1$ تابع درېم مشتق په لاس راوړئ.

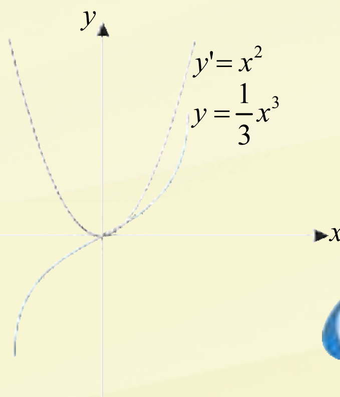
**حل**:

$$y=x^3-3x^2+4x-1$$
$$y'=3x^2-6x+4$$
$$y''=6x-6$$
$$y'''=6$$

**دويم مثال**: د $y=\frac{1}{3}x^3$ تابع گراف او د هغې د لومړی مرتبې مشتق تابع گراف رسم کړئ.

**حل**:

$$y=\frac{1}{3}x^3$$
$$y'=\frac{3}{3}x^2=x^2$$
$$y'=x^2$$



**دریم مثال**: که $y=\sin x+\cos x$ وي، د $(y^{(9)})^2+y^2$ قیمت پیدا کړئ.

**حل**: لومړی د تابع نهمه مرتبه مشتق یا $(y^{(9)})$ په لاس راوړو:

$$y=\sin x+\cos x$$
$$y'_{(x)}=\cos x+(-\sin x)=\cos x-\sin x$$
$$y''_{(x)}=-\sin x-(\cos x)=-\sin x-\cos x$$
$$y'''_{(x)}=-\cos x-(-\sin x)=\sin x-\cos x$$
$$\vdots$$
$$f'^{(9)}_{(x)}=\cos x-\sin x$$
$$(y^{(9)})^2+y^2=(\cos x-\sin x)^2+(\sin x+\cos x)^2$$
$$=\cos^2 x-2\sin x\cos x+\sin^2 x+\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x$$
$$=2\sin^2 x+2\cos^2 x=2(\sin^2 x+\cos^2 x)=2$$

**څلورم مثال**: د $y=2x^6-3x^5-2x^3-3x^2-1$ د تابع پنځه ځلې مشتق پیدا کړئ.

$$y=2x^6-3x^5-2x^3-3x^2-1$$
$$y'=12x^5-15x^4-6x^2-6x$$
$$y''=60x^4-60x^3-12x-6$$
$$y'''=240x^3-180x^2-12$$
$$y^{(4)}=720x^2-360x$$
$$y^{(5)}=1440x-360$$

**یادونه**: که چېرې $n-$ام درجه‌يي څو جمله‌يي تابع $c_n\neq 0$ $f_{(n)}(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ ...+c_nx^n$ راکړی شوی وي $n-$ام مشتق يې په لاندې ډول په لاس راځي:

$$f_{n(x)}=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ ...\ +c_nx^n \qquad c_n\neq 0$$
$$f'_{(x)}=c_1+2c_2x+3c_3x^2+\ ...\ +nc_nx^{n-1}$$
$$f''_{(x)}=2c_2+6c_3x+\ ...\ +n(n-1)c_nx^{n-2}$$
$$f'''_{(x)}=6c_3+12c_4x+\ ...\ +n(n-1)(n-2)c_nx^{n-3}$$
$$f^n(x)=n(n-1)(n-2)\ ...\ c_n=n!c_n$$

په عمومي ډول که $k>n$ وی، نو: $f^k(x)=0$



## پوښتنې

د لاندې تابعګانو تر هغې مشتق ونیسئ چې د مشتق تابع له صفر سره مساوي شي.

1) $y=4x^4-3x^3-2x$

2) $y=(5x-2)^3$

3) $y=a+b+c^2-x-ax-bx-cx^3-c^3x$

4) $y=\sin x$

– که چېرې د $P(x,f(x))$ او $Q(x+h,f(x+h))$ ټکی د $f(x)$ تابع دوه اختیاري ټکي وي، نو لاندې اړیکه د Newton خارج قسمت په نامه یادېږي:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{x+\Delta x-x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

د منحني د مماس میل په یوه اختیاري ټکي کې عبارت دی، له:

$$m_T=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

**د یوې تابع مشتق**: د تابع او متحول د تزاید، د نسبت لېمیټ کله چې $\Delta x\to 0$ وکړي، د مشتق په نامه یادېږي او په $f'(x)$ , $\frac{dy}{dx}$ سره ښودل کېږي.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)=y'$$

که چېرې د $f(x)$ تابع د $(x_0)$ په یوه ټکي کې د مشتق وړ وي، نو $f'(x)$ د مماس میل د منحني سره د $(x_0,f(x_0))$ په ټکي کې دی.

که د $f$ تابع د $x=x_0$ په ټکي کې د مشتق وړ وي، نو دا تابع په $x_0$ کې متمادي ده، خو ددې برعکس سمه نه ده، یعنې کېدای شي یوه تابع په یوه ټکي کې متمادي وي، ولې په هغه ټکي کې د مشتق وړ نه وي.

د $f(x)$ د تابع مشتق د $C$ پر منحني $P(x_0,f(x_0))$ په ټکي کې د مماس له میل سره برابر دی.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'=\tan\alpha=\tan\theta=m_\Delta$$

د تماس په ټکي کې له یوې منحني سره د مماس میل د هغې تابع د مشتق په نوم یادېږي.

که د یوې تابع مشتق ونیول شي، نو یوه تابع په لاس راځي چې دا د مشتق تابع بلل کېږي.

که د $f$ تابع د $(x_0-r\ ,x_0+r)$ په فاصله کې( $x_0=x$ په شاوخوا) کې تعریف شوې وي او د هغې لېمیټ موجود وي، په دې حالت کې کولای شو چې یو مماس خط د $f(x)$ د تابع په منحني د $x=x_0$ په ټکي کې رسم کړو، د دې مماس میل عبارت دی له: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

د مشتق قوانین:

$$1)\ \ f(x)=C \quad \Rightarrow \quad f'(x)=0$$

$$2)\ \ f(x)=x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x)=n\cdot x^{n-1}$$

$$3)\ \ f(x)=u\pm v \quad \Rightarrow f'(x)=u'\pm v'$$

$$4)\ \ f(x)=u\cdot v \quad \Rightarrow \quad f'(x)=u'v+v'u$$

$$5)\ \ f(x)=\frac{u}{v} \quad , \quad v\neq 0 \ \Rightarrow \ f'(x)=\frac{u'v-v'u}{v^2}$$

$$6)\ \ f(x)=\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$7)\ \ f(x)=\sqrt{u} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$8)\ \ f(x)=\sqrt[n]{u} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{u'}{n\cdot\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

د مرکبو توابعو مشتق: $y'_{(x)}=y'_{(u)}\cdot u'_{(x)}$

د مثلثاتي تابع گانو مشتق:

$$1)\ \ y=\sin x \ \Rightarrow \ y'=\cos x \quad , \quad y=\sin u \ \Rightarrow \ y'=u'\cos u$$

$$2)\ \ y=\cos x \ \Rightarrow \ y'=-\sin x \quad , \quad y=\cos u \ \Rightarrow \ y'=-u'\sin u$$

که د $y=f(x)$ تابع مشتق منونکی وي، په بشپړ ډول $n$ -ام ځلي مشتق یې $y^{(n)}=f^{(n)}(x)$ دی.

## د دويم څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه درکړل شوي دي، سم ځواب په نښه کړئ:

1- $f(x)=x^2-x$ منحني ميل د $P(3,0)$ په ټکي کې عبارت دی له:

$a)\ 3$ $b)\ -3$ $c)\ 5$ $d)\ -5$

2- د $f(x)=2x^2$ په تابع کې د $f$ متوسط بدلون د $[3\,,4]$ په انټروال کې عبارت دی له:

$a)\ 18$ $b)\ 14$ $c)\ -14$ $d)\ 32$

3- د $y=2x^2-3x^{-1}$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=4x^2+3$ $b)\ y'=4x+\frac{1}{2}x$ $c)\ y'=4x+\frac{3}{x^2}$ $d)\ y'=4x$

4 – د $f(x)=\sqrt{x-1}$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ 0$ $b)\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$ $c)\ \frac{x-1}{2\sqrt{x}}$ $d)\ \frac{-1}{2\sqrt{x-1}}$

5 – د $f(x)=2x^2+x$ تابع د $x=1$ په ټکي کې د مماس خط معادله عبارت ده له:

$a)\ y=5x-2$ $b)\ y=x-3$ $c)\ y=5$ $d)\ y=5x$

6- د $y=\frac{2x}{-x+4}$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=-4x+8$ $b)\ y'=-2$ $c)\ y'=\frac{4x+8}{(-x+4)}$ $d)\ y'=\frac{8}{(-x+4)^2}$

7 – د $y=(2-x^2)^3$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=-6x^5+2x^3-24x$ $b)\ y'=3(2-x^2)^2$ $c)\ y'=3(-2x)^2$ $d)$ هيڅ يو

8 – د $y=\sin x$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=\sin x$ $b)\ y'=\cos x$ $c)\ y'=-\sin x$ $d)\ y'=-\cos x$

9 – د $y=(1+x^4)^{\frac{-1}{5}}$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=-\frac{4}{5}x^3(1+x^2)^{\frac{-6}{5}}$ $b)\ y'=-\frac{1}{5}(1+x^2)^{\frac{-6}{5}}$

$c)\ y'=-4x^3$ $d)$ هيڅ يو

10– د $y=\frac{\cos}{1-\cos x}$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=\frac{\sin x}{(1-\cos x)^2}$ $b)\ y'=\frac{-\sin x}{(1-\cos x)}$ $c)\ y'=\frac{-\sin x}{(1-\cos x)^2}$ $d)$ هيڅ يو

لاندې پوښتنې حل کړئ.

1. د $f(x)=\dfrac{2\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

2. د $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x-x^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

3. د $f(x)=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$ تابع مشتق پیدا کړئ.

4. د $f(x)=(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x}+4)$ تابع مشتق پیدا کړئ.

5. د $f(x)=\sin x\cdot\cos x$ د تابع مشتق د $\dfrac{\pi}{4}$ په ټکي کې پیدا کړئ.

6. د $f(x)=\dfrac{(\sin x+\cos x)^2}{1+\sin 2x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

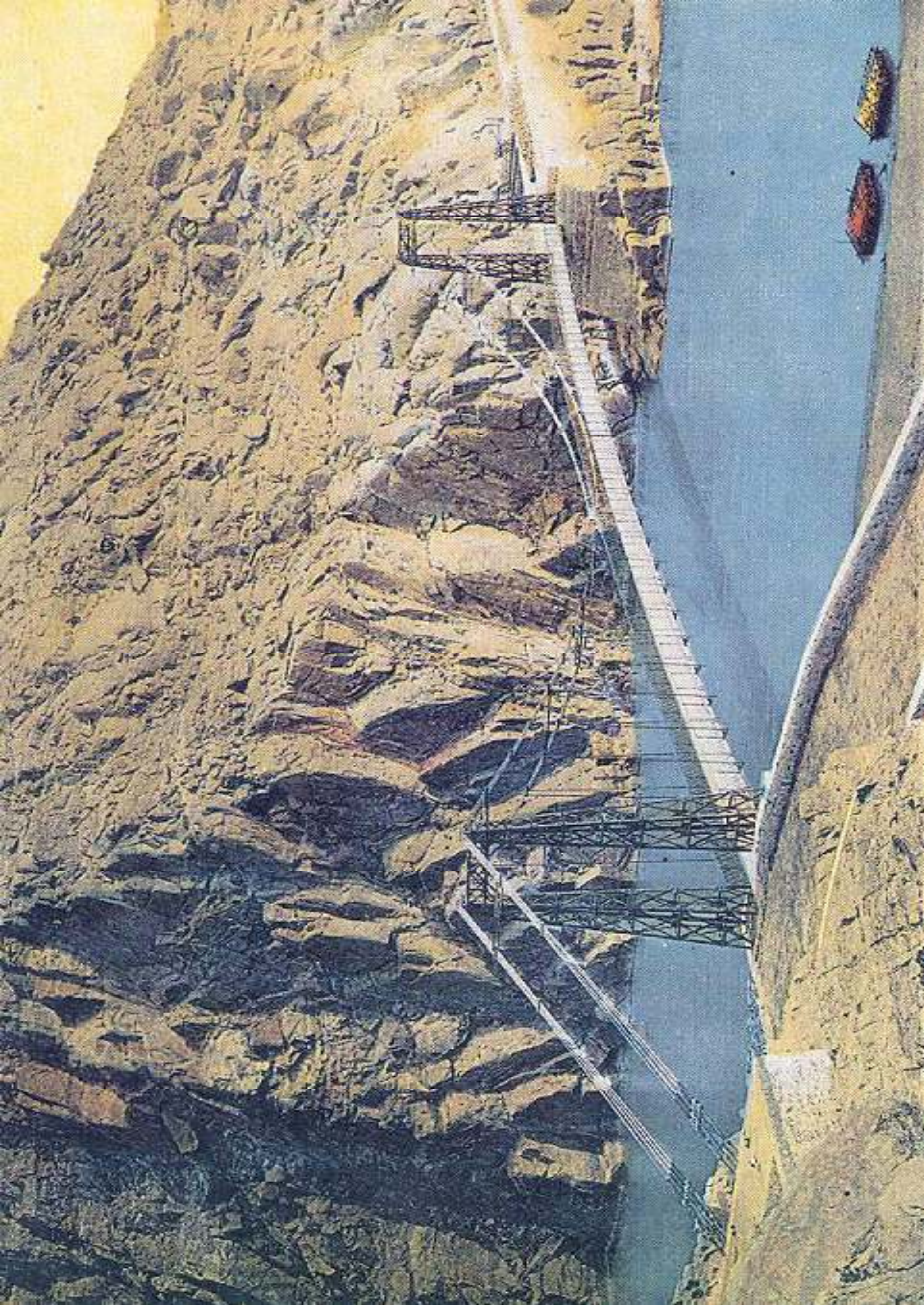
7. د $y=\cos x$ تابع اتمه مرتبه مشتق پیدا کړئ.

8. د $y=\sin^2 x+\cos^2 x$ تابع نهمه مرتبه مشتق پیدا کړئ.

9. د $x^2+xy+y^2=3$ تابع ضمني مشتق پیدا کړئ.

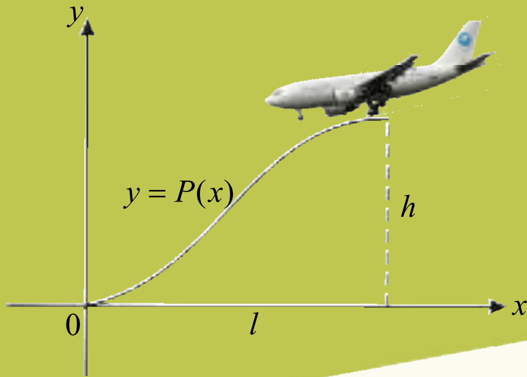
# دریم څپرکی

## د مشتق د استعمال ځایونه



## د مشتق د استعمال ځایونه

د مخامخ شکل د ارتفاع په اړه خپل نظر بیان کړئ.

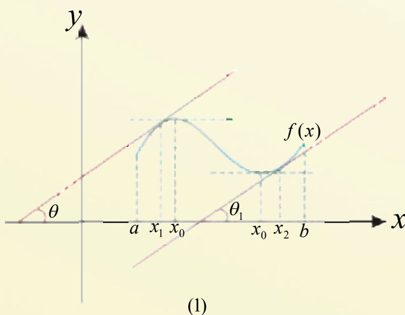



له مشتق څخه په ډېرو ځایونو کې، لکه: (په فزیك کې د حرکت، سرعت او تعجیل اړوند معادلې د مشتق څخه په ګټه اخیستنې سره حلېږي همدارنګه په کیمیا کې هم، د تابع د تحولات، د ځینو لیمیټونو په پیدا کولو کې) کار اخیستل کېږي چې ځینې ځایونه یې دلته تر څېړنې لاندې نیسو.

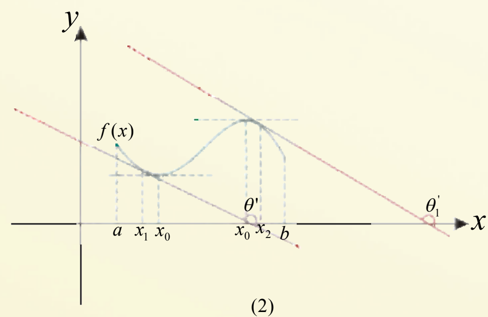
### I-د یوې تابع تحولات:




لاندې شکلونو ته پاملرنه وکړئ:




(1)




(2)

- متزایدې او متناقصې توابع څه ډول توابع دي؟
- د (1) شکل په $(a,b)$ انټروال کې د $x_0$، $x_1$ او $x_2$ په ټکو کې د رسم شویو مماسونو میلونه د (2) شکل له مماسونو سره پرتله کړئ.
- په (1) او (2) شکلونو کې تر ټولو لوړ ټکی او تر ټولو ټیټ ټکی په ګوته کړئ.

- په پورته شکلونو کې وښيي چې کومه تابع په کومه ساحه کې متزايده او په کومه ساحه کې تابع متناقصه ده؟
- په متزايده، متناقصه او ثابته تابع کې مشتق و څېړئ.

د پورته فعاليت پايله داسې بيانوو:

1- که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انتروال کې متمادي او په $(a,b)$ انتروال کې د مشتق وړ وي، نو که چېرې په ورکړل شوي انټروال کې $f'(x)>0$ وي، تابع په هغه انټروال کې متزايده بلل کېږي.

2- که چېرې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي او د $(a,b)$ په انټروال کې د مشتق وړ وي که به ورکړ شوي انټروال کې $f'(x)<0$ وي، نو تابع په هغه فاصله کې متناقصه بلل کېږي.

**يادونه**: د تابع له تزايد څخه مطلب دا دی چې د x د متحول قيمت په زياتېدو سره د تابع قيمت زيات او د تابع له تناقص څخه مطلب دا دی چې د x د متحول د قيمت په زياتېدو سره د y يا تابع قيمت کم پاتې شي.

**لومړی مثال**: وښيئ چې د $f(x)=x^3+3x+1$ تابع گراف متزايد ده.

**حل**: څرنگه چې تابع کسري بڼه نه لري، نو ټول حقيقي عددونه د تعريف ساحه کېدای شي او هم پوهېږو چې د تابع د تزايد شرط $f'(x)>0$ دی، نو لازمه ده چې د تابع مشتق تر مطالعې لاندې ونيسو:

$$f(x)=x^3+3x+1$$
$$f'(x)=3x^2+3$$

ليدل کېږي چې د مشتق لومړی حد تام مربع دی، نو د $x$ د ټولو قيمتونو لپاره همېشه مثبت دی. کله چې (+3) ورسره جمع شي بيا هم قيمت يې مثبت دی، نو د $f'(x)>0$ دی، نو تابع متزايده ده.

**دويم مثال**: د $f(x)=x^3-3x+5$ تابع په کوم انټروال کې متناقصه ده؟

**حل**: څرنگه چې د $f(x)$ تابع په هر انټروال کې متمادي او د مشتق وړ ده، نو د متناقص تابع لپاره لرو $f'(x)<0$ دی، يعنې:

$$f'(x)=3x^2-3<0$$
$$f'(x)=0$$
$$3x^2-3=0$$
$$3x^2=3$$
$$x=\pm 1$$

ليدل کيږي چې د تابع مشتق د $-1 < x < 1$ په انتروال کې منفي دی، نو تابع په همدې انتروال کې $(-1,1)$ متناقصه ده.

**دریم مثال**: د $f(x) = 5x - 4$ تابع تحولات وڅېړئ.

**حل**: لومړی د تابع د تعریف ساحه پیدا او وروسته د تابع د تزاید شرط په کې څېړو:

$$D_f \to IR$$
$$f(x) = 5x - 4$$
$$f'(x) = 5 > 0$$

څرنګه چې $f'(x) > 0$ نو د ټولو قیمتونو لپاره همېشه مثبت دی. نو تابع متزایده ده.

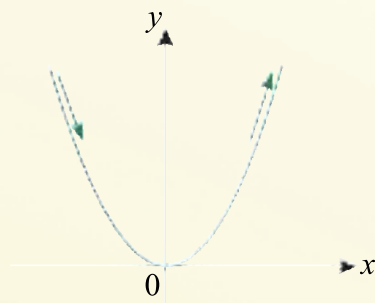
**څلورم مثال**: د $y = x^2$ د تابع ګراف ته ځیر شئ او وښیئ چې ورکړل شوي تابع په کوم انټروال کې متزایده او په کوم انټروال کې متناقصه ده.

**حل**: پوهېږو چې که تابع متناقصه وي $y' < 0$ او که تابع متزایده وي $y' > 0$ څخه دی، نو لیکلای شو چې:

$$y = x^2 \quad \Rightarrow \quad y' = 2x$$

د تناقص شرط $y' < 0 \quad \Rightarrow \quad 2x < 0 \quad \Rightarrow \quad x < 0$

د تزاید شرط $y' > 0 \quad \Rightarrow \quad 2x > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 0$




| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $4$ | $\searrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $4$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

د تابع له ګراف څخه لیدل کیږي چې تابع د $(-\infty, 0)$ په انتروال کې متناقصه او په $(0, +\infty)$ انتروال کې متزایده ده.



## پوښتنې

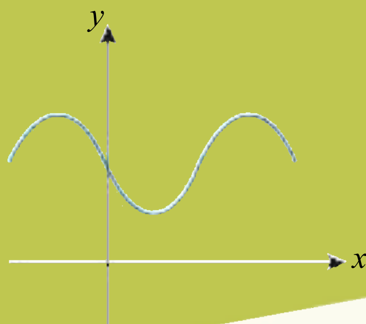
1- د $f(x)=ax+b$ د تابع تحولات وښيئ؟

2- د $y=\frac{-3}{4}x-1$ د تابع تحولات وښيئ؟

3- وښياست چې د $f(x)=2x^2+3x+1$ تابع په کوم انټروال کې متزايده ده؟

4- د $y=x^2+3x+2$ د تابع د تزايد انټروال و ټاکئ؟

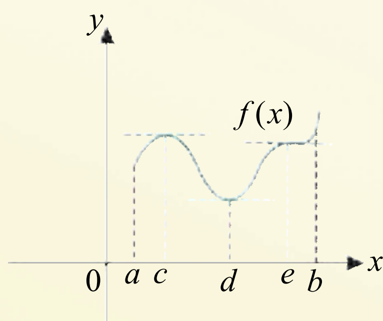
## د يوې تابع بحراني (*Critical Point*) ټکي (اعظمي *Maximum* او اصغري *Minimum*)




په مخامخ شکل کې تر ټولو لوړ ټکی او تر ټولو ټيټ ټکی وښيئ او ووايئ چې دا ټکي د څه په نامه يادېږي؟




که په لاندينې شکل کې د $f(x)$ تابع د $(a,b)$ په انټروال کې د مشتق وړ وي.




- د متحول د قيمت په زياتوالي په کوم انټروال کې د تابع قيمت لويېږي.
- د متحول د قيمت په کموالي په کوم انټروال کې د تابع قيمت کمېږي.
- د تابع تحولات په $(c,d)$ او $(d,e)$ انټروال کې وڅېړئ.
- د $f(x)$ تابع مشتق په کومو ټکو کې له صفر سره مساوي دی.

د پورته فعاليت پايله داسې بيانوو:

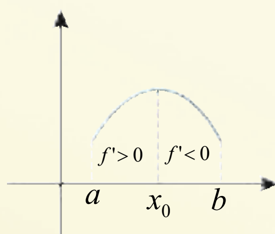
د يوې تابع په ګراف کې د $y$ پر محور تر ټولو لوړې نقطې ته اعظمي(maximum) او تر ټولو ټيټې نقطې ته د تابع اصغري(minimum) نقطه وايي، د $x$ د هغو قيمتونو لپاره چې تابع اعظمي او يا اصغري قيمتونه اخلي د بحراني(*Critical Point*) نقطو په نامه يادېږي.

**تعريف**:

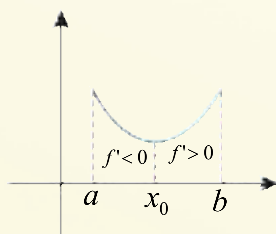
1- **ثابته تابع**: که چېرې د يوې تابع لومړی مشتق هميشه له صفر سره مساوي وي تابع ته ثابته تابع وايي.

2- **متزايده تابع**: که چېرې د يوې تابع لومړی مشتق د $(a,b)$ په فاصله کې مثبت وي تابع په هغه فاصله کې متزايده بلل کېږي، يعنې $y'>0$ چې په لاندې شکلونو کې ليدل کېږي.

3- **متناقصه تابع**: که چېرې د يوې تابع لومړی مشتق د $(a,b)$ په فاصله کې منفي وي يعنې $y'<0$ وي، تابع په هغه فاصله کې متناقصه بلل کېږي چې په لاندې شکلونو کې ليدل کېږي.



(1)



(2)

1- **اعظمي ټکی**: که چېرې د $y=f(x)$ تابع د $x_0$ په معين ټکي کې د تزايد له حالت څخه د تناقص حالت ته بدل شي يا په بل عبارت د $x_0$ په دې معين ټکي کې د مشتق اشاره له مثبت څخه منفي ته بدله شي د $x_0$ په نقطه کې د تابع قيمت د اعظمي(maximum) په نامه يادېږي.

2- **اصغري ټکی**: که چېرې د $y=f(x)$ تابع د $x_0$ په معين ټکي کې د تناقص له حالت څخه تزايد حالت ته بدل شي يا په بل عبارت د $x_0$ په دې معين ټکي کې د مشتق اشاره له منفي څخه مثبت ته بدله شي د $x_0$ په نقطه کې د تابع قيمت د اصغري (minimum) په نامه يادېږي.

3- **د انعطاف ټکی**: که چېرې مشتق خپله اشاره د $x_0$ په يوه معين ټکي کې له مثبت څخه صفر ته او بيا مثبت ته يا له منفي څخه صفر او بيا منفي ته بدله کړي د $x_0$ د انعطاف د نقطې *Inflection Point* په نامه يادېږي.

**لومړی مثال**: د $f(x) = x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 2x$ تابع راکړل شوی ده دا تابع خو د (Extreme) ټکي لري.

**حل**: د تابع لومړی مشتق پیداکوو بیا هغه مساوي په صفر وضع کوو او د $x$ قیمتونه په لاس راوړو.

$$f'_{(x)} = 3x^2 - 7x + 2$$

$f'(x) = 0$

$3x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}$

$x - 2 = 0 \Rightarrow x_2 = 2$

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{1}{3}$ | | $1$ | | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-\infty \nearrow$ | $\frac{17}{54}$ | $\searrow$ | $-2$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow +\infty$ |
| | | Max | | | | Min | |

په پایله کې ویلای شو چې اصلي تابع دریمه درجه ده، نو د $f(x)$ د تابع مشتق د $(\frac{1}{3})$ او $(2)$ په دوو نقطو کې خپله علامه بدلوي، نو دوه بحراني(Extreme) ټکي لري.

**دویم مثال**: د $f(x) = \frac{x+1}{x^2 - 2x}$ تابع موضعي Extreme ټکي یا نسبتي ټکي مشخص کړئ.

**حل**: لومړی د تابع مشتق په لاس راوړو، وروسته یې علامې ټاکو:

لیدل کیږي چې تابع د $y = \frac{u}{v}$ شکل لري، نو $y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2 - 2x}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - (2x-2)(x+1)}{(x^2 - 2x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 2x + 2}{(x^2 - 2x)^2}$$

دیوه کسر قیمت هغه وخت له صفر سره مساوي دی چې د تابع صورت مساوي له صفر سره وي.

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow -x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 12$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 + \sqrt{12}}{-2} = -2.73$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 - \sqrt{12}}{-2} = 0.73$$

| $x$ | | $-3$ | | $-2.73$ | | $-1$ | | $0.73$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | $-\frac{2}{15}$ | $\searrow$ | Min | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | Max | $\searrow$ | $-2$ | $\searrow$ |

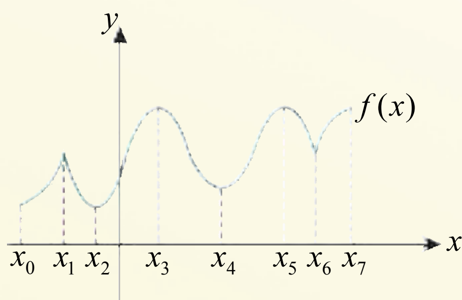
په جدول کې ښکاري چې $f'$ د $x_1$ او $x_2$ دواړو خواوو ته خپله علامه بدلوي، نو تابع دوه بحراني Extreme ټکي لري، يعنې تابع اعظمي او اصغري ټکي لري.

## مطلق اعظمي او مطلق اصغري ټکي Absolute Maximum & Absolute Minimum

کېداى شي يوه تابع په يوه انټروال کې څو موضعي بحراني ټکي ولري، خو په يوه ټاکلي انټروال کې تابع يوازې يوه مطلقه اعظمي او يوه مطلقه اصغري نقطه لري. په شکل کې يې وښيئ؟



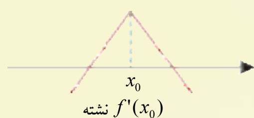

لاندينى شکل ته ځير شي:

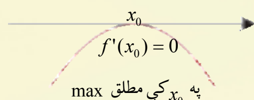


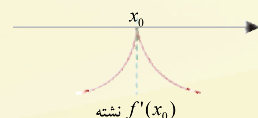

- د $f(x)$ په تابع کې اعظمي او اصغري ټکي وښيئ.
- د $f(x)$ تابع بحراني ټکي په ګوته کړئ.
- پورتنى تابع په ورکړل شوي انټروال کې څو موضعي بحراني ټکي لري.
- پورتنى تابع په ورکړل شوي انټروال کې څو اصغري او اعظمي لري.

د پورته فعاليت پايله داسې بيانوو:

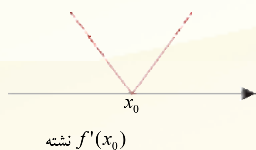
**مطلق اعظمي** Absolute Maximum: په عمومي ډول د $(x_0, f(x_0))$ ټکى مطلق اعظمي بلل کېږي، که چېرې د $f(x)$ د تعريف په ساحه کې د هر $x$ لپاره $f(x) \leq f(x_0)$ وي، نو $f(x_0)$ ته مطلق اعظمي وايي لاندې شکلونه وګورئ.



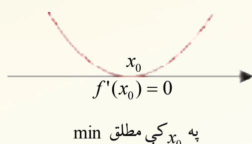



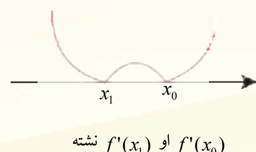
**مطلق اصغري** Absolute Minimum: په عمومي ډول د $(x_0, f(x_0))$ نقطه مطلقه اصغري بلل کېږي، که چېرې د $f$ د تعریف په ساحه کې د هر $x$ لپاره $f(x) \geq f(x_0)$ وي، نو په دې حالت کې $f(x_0)$ ته مطلقه اصغري وایي، د $x$ هغه قیمتونه چې د هغوی لپاره تابع یا اعظمي او یا اصغري قیمتونه اخلي د $x$ دغه قیمتونه د Extreme په نامه یادېږي.



$f'(x_0)$ نشته



په $x_0$ کې مطلق min

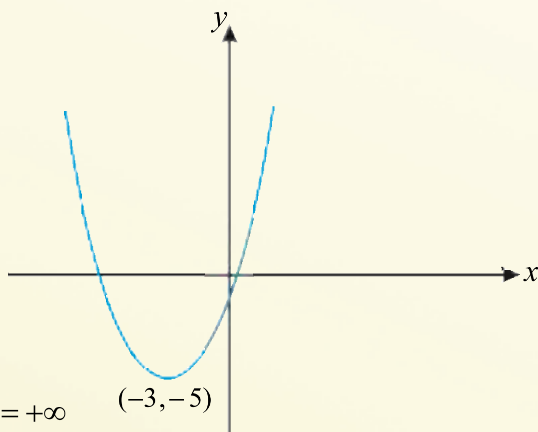


$f'(x_1)$ او $f'(x_0)$ نشته

**لومړی مثال**: د $f(x)=\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{1}{2}$ د تابع مطلق اصغري پیداکړئ.

**حل**: د $f(x)$ د تابع مشتق نیسو او د مشتق د تابع حلونه په لاس راوړو:

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{1}{2}$$
$$f'(x)=x+3$$
$$f'(x)=0$$
$$x+3=0$$
$$x=-3$$
$$f(-3)=-5$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}(\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{1}{2})=+\infty$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}x^2+3\lim_{x\to\infty}x-1\lim_{x\to\infty}-\frac{1}{2}=+\infty$$



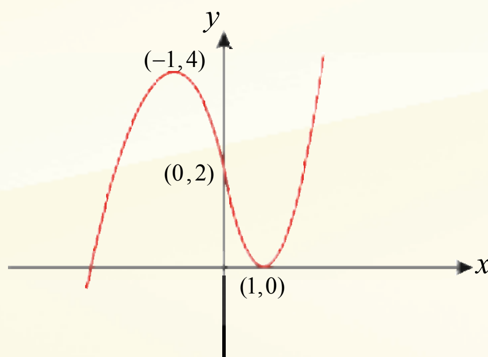

| $x$ | $-\infty$ | $-4$ | | $-3$ | | $1$ | | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | $-\frac{9}{2}$ | ↘ | $-5$ Min | ↗ | $3$ | ↗ | $\frac{15}{2}$ | ↗ $+\infty$ |

په پایله کې د $x=-3$ په ټکي کې چې د تابع قیمت $(-5)$ دی او تابع په $(-3,-5)$ ټکي کې مطلق اصغري لري.

**دویم مثال**: د $f(x)=x^3-3x+2$ د تابع اعظمي او اصغري ټکي پیدا او رسم يې کړئ.

**حل**: د اعظمي او اصغري ټکو د پیداکولو لپاره لومړی د تابع لومړی مشتق پیدا او بیا د مشتق د تابع صفري ټکي په لاس راوړو.

$$f(x)=x^3-3x+2$$
$$f'(x)=3x^2-3$$
$$f'(x)=0$$
$$3x^2-3=0$$
$$3x^2=3$$
$$x^2=1$$
$$x_1=1 \quad , \quad x_2=-1$$
$$f(-1)=(-1)^3-3(-1)+2$$
$$=-1+3+2$$
$$=4$$
$$f(1)=1^3-3\cdot1+2=1-3+2=0$$
$$f(0)=0-3\cdot0+2=2$$
$$f(2)=2^3-3\cdot2+2=4$$
$$f(1)=0 \quad , \quad f(0)=2 \quad , \quad f(-1)=4$$
$$Max\ f(-1)=4 \qquad Min\ f(1)=0$$




| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $-\frac{5}{6}$ | ↗ | $4$ | ↘ | $2$ | ↘ | $0$ | ↗ | $4$ | ↗ | $+\infty$ |
| | | | | | *Max* | | | | *Min* | | | | |

له جدول څخه لیدل کېږي چې تابع د $(-\infty,-1)$ او $(1,+\infty)$ په انټروالونو کې متزایده او $(-1,1)$ په انټروال کې متناقصه ده، نو د $(1,0)$ نقطه اصغري او د $(-1,4)$ نقطه اعظمي ده.

د يوې تابع د ګراف رسمولو لپاره لاندې ټکي باید په پام کې ونیسو:

1. د تابع متمادیت او نامتمادیت مطالعه کړو.
2. د قایمو محورونو سره د ګراف تقاطع.
3. د لومړي مشتق د اشارې مطالعه د تابع د تزاید او تناقص لپاره.
4. د تابع د اعظمي او اصغري ټکو لپاره د مشتق صفري ټکي پیداکول.
5. د مجانبونو ټاکل.
6. د جدول ترتیبول او د هغوی په مرسته د ګراف رسمول.

**دریم مثال**: د $y = 2 + x - x^2$ تابع گراف رسم کړئ؟

**حل**: لیدل کېږي چې تابع د متحول د ټولو قیمتونو لپاره تعریف شوي ده.

1- ددې تابع د تقاطع ټکی د $x$ او $y$ له محورونو سره پیداکوو:

د $y$ له محور سره د گراف تقاطع د ټکو د پیداکولو لپاره په ورکړشوي تابع کې $x = 0$ وضع کوو:

$$x = 0 \qquad y = 2 + 0 - 0 = 2$$

نو پورتنی گراف د $y$ محور په $(0,2)$ نقطه کې قطع کوي.

د $x$ د محور سره دگراف د تقاطع د ټکو دپیدا کولو لپاره $y$ مساوي په صفر وضع کوو او د $x$ قیمت پیداکوو:

$$y = 0 \;\; , \;\; 2 + x - x^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2}}{-2} = -\frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = -1 \;\; , \;\; x_2 = 2$$

نو پورتنی گراف د $x$ محور په $(-1,0)$ او $(2,0)$ نقطو کې قطع کوي.

2- د تابع اعظمي او اصغري ټکي پیداکوو، ددې کار لپاره دتابع اول او دویم مشتق څېړو.

$$y = 2 + x - x^2$$

څرنگه چې د تابع په اعظمي او اصغري نقطو کې د تابع لومړی مشتق صفر دی نو $y' = 0$ سره وضع کوو:

$$y' = 1 - 2x$$

$$y' = 0 \text{،} \quad 1 - 2x = 0$$

$$-2x = -1 \;\; \Rightarrow \;\; 2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

تابع په $x = \frac{1}{2}$ نقطه کې یو اعظمي یو یا اصغري قیمت لري، دهغې دپیژندنې له پاره دتابع دویم مشتق په $x = \frac{1}{2}$ ټکو کې څېړو:

$$y'' = -2 < 0$$

 څرنګه چې $y''$ تل منفي دی، نو په $x = \frac{1}{2}$ کې هم منفي دی، څکه نو تابع په $x = \frac{1}{2}$ ټکی کې یو اعظمي

قیمت لري څرنګه چې د $x = \frac{1}{2}$ لپاره $y = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$ کېږي، نو د تابع اعظمي نقطه داده:

$(\frac{1}{2}، 2\frac{1}{4})$

دامنحني دانعطاف نقطه نه لري، څکه چې دهر $x$ لپاره $y'' < 0$ دی.

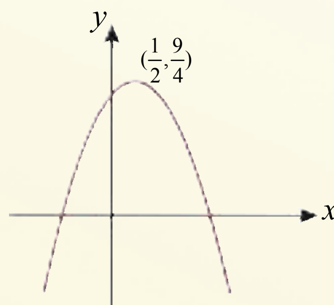
3- په $\pm\infty$ کې دګراف څېړل:

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty}(2 + x - x^2) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty}(2 + x - x^2) = -\infty$$

د زیاتي روښانتیا لپاره لاندې جدول ترتیب شوی، او د تابع ټول بدلونو نه په هغو کې په ګوته کوو او وروسته نوموړی ګراف رسموو.

| $x$ | | $-1$ | | $\frac{1}{2}$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ |
| $y$ | ↗ | $0$ | ↗ | $2\frac{1}{4}$ | ↘ | $0$ | ↘ |



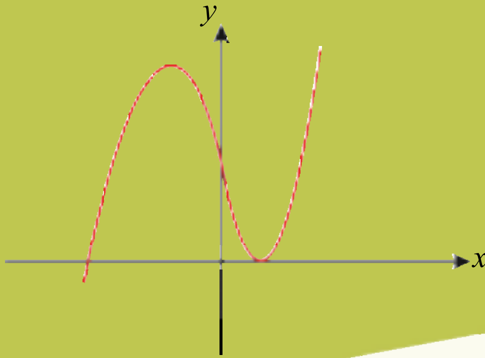

## پوښتني

1- د لاندې توابعو موضعي Extreme ټکی و ټاکئ.

$a)\ f(x) = x^2 - 3x + 2$ $\qquad b)\ f(x) = \frac{x+1}{x^2}$ $\qquad c)\ y = 3x^2 - 4x + 1$

2- د $f(x) = 3x^3 - 4x^2$ د تابع مطلقه min پیدا کړئ.

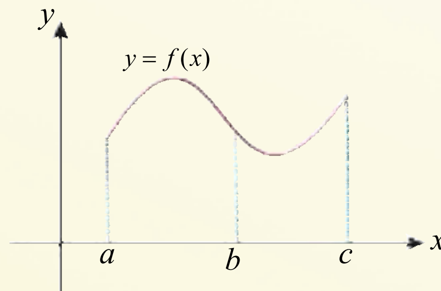
## د انعطاف د نقطې ټاکل




هغه ټکي چې د يوې تابع ګراف په هغې کې خپل محدبيت، مقعريت ته او يا ددې پر عکس بدلوي د څه په نامه يادېږي؟ آيا په دې ټکي کې د دويم مشتق علامه او قيمت څېړلای شئ؟



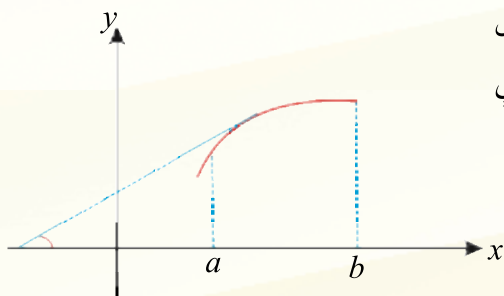

لاندينی شکل په پام کې ونيسئ.



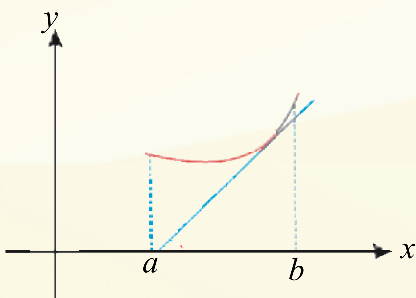

- د $y = f(x)$ د تابع منحني د $(a,b)$ په انټروال کې څه ډول منحني بلل کېږي؟
- د $y = f(x)$ د تابع منحني د $(b,c)$ په انټروال کې څه ډول منحني بلل کېږي؟
- د $(a,b)$ په انټروال کې په منحني يو مماس رسم کړئ او له هغه مماس سره يې پرتله کړئ چې د $(b,c)$ په انټروال کې په منحني رسمېږي.

د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:

1. د $y = f(x)$ تابع منحني په يوه انټروال کې پرسيدلی يا محدب بلل کېږي، که چېرې په دې انټروال کې په منحني مماس رسم شي، نو مماس د منحني له پاسه يا پورته خواته پروت وي، په دې صورت کې د تابع دويم مشتق منفي $y'' < 0$ په لاس راځي.




په دې ډول که د $y = f(x)$ د تابع دویم مشتق د انټروال په ټولو ټکوکې منفي وي، نو د تابع ګراف یا منحني په دې انټروال کې محدب پاتې کېږي.




2. د $y = f(x)$ د تابع منحني په یوه انټروال کې ننوتې یا مقعره بلل کېږي، که چېرې په نوموړي انټروال کې پـه منحني مماس رسم شي، نو مماس له منحني څخه لاندې یا ښکته خوا پروت وي، کـه د $y = f(x)$ د تابع دویم مشتق د انټروال پـه ټولو ټکوکې مثبت وي $y''>0$، منحني په دې انټروال کې مقعره بلل کېږي.

**تعریف**: هغه نقطه چې تابع له مقعریت څخه محدبیت تـه او یـا ددې پـر عکس جهت بـدلوي، او لـومړی مشتق یې موجود او دویم مشتق یې صفر شي د انعطاف (Inflection) نقطه بلل کېږي.
که د $y = f(x)$ تابع د $x = x_0$ په ټکي کې چې د تابع دویم مشتق صفر شي ($f''(x_0)=0$) وي تـابع د $x = x_0$ په ټکي کې د انعطاف نقطه لري او ددې برعکس تابع د انعطاف نقطه نه لري.

**لومړی مثال**: د $f(x) = x^2 - 5x + 4$ د تابع ګراف رسم محدبیت او مقعریت یې وښیېئ.

**حل**: تابع د متحول د ټولو قیمتونو لپاره تعریف شوې ده.

1- د $y$ له محورسره تقاطع

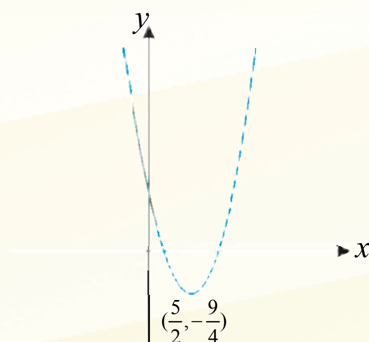
$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=4 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,4)$$

2- د $x$ له محورسره تقاطع

$$\left.\begin{array}{l} y=0 \\ x^2-5x+4=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2-5x+4=(x-4)(x-1) \Rightarrow x_1=4 \quad , \quad x_2=1$$

د $x$ له محور سره د تقاطع ټکي $(4,0)$ او $(1,0)$ دي.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $\frac{5}{2}$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $+$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $4$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\frac{9}{4}$ min | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |




د ګراف، مقعریت او محدبیت د څېړلو لپاره د تابع دویم مشتق په لاس راوړو:

$$f(x)=x^2-5x+4 \quad \Rightarrow \quad y'=2x-5$$
$$f''(x)=2>0$$

څرنګه چې $y''>0$ دی، نو په پایله کې ویلای شو چې منحني ننوتې یا مقعره ده.

**دویم مثال**: هغه انټروالونه وټاکئ چې په هغې کې د $y=x^3+9x^2-6x+1$ تابع ګراف محدب یا مقعر وي.

**حل**:

$$y=x^3+9x^2-6x+1$$
$$y'=3x^2+18x-6 \quad \Rightarrow \quad y''=6x+18$$
$$y''<0 \quad \Rightarrow \quad 6x+18<0$$
$$6x<-18 \quad \Rightarrow \quad x<-3$$
$$y''>0 \quad \Rightarrow \quad 6x+18>0$$
$$6x>-18$$
$$x>-3$$

| $x$ | $-\infty$ | $-3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $y''$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | $\cap$ | | $\cup$ |
| | محدب | انعطاف | مقعر |

څرنګه چې ليدل کیږي د تابع دویم مشتق په $(-\infty,-3)$ انټروال کې منفي او د $(-3,+\infty)$ انټروال کې مثبت دي، نو دا ډول ګراف په لومړي انټروال کې محدب او په دویم کې مقعر دی.

**دریم مثال**: د $f(x)=x^5-5x^3$ د تابع د انعطاف ټکی و ټاکئ؟

**حل**:

$$f(x)=x^5-5x^3 \Rightarrow f'(x)=5x^4-15x^2$$

$$f''(x)=20x^3-30x$$

$$f''(x)=0$$

$$20x^3-30x=0$$

$$x(20x^2-30)=0$$

$$x_1=0$$

$$20x^2-30=0$$

$$x^2=\frac{3}{2} \Rightarrow x_2=\sqrt{\frac{3}{2}} \quad , \quad x_3=-\sqrt{\frac{3}{2}}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{\frac{3}{2}}$ | | $0$ | | $\sqrt{\frac{3}{2}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\cap$ | $-13.65$ | $\cup$ | | $\cap$ | $-6\sqrt{\frac{3}{2}}$ | $\cup$ | |

لیدل کېږي چې په $x=\sqrt{\frac{3}{2}}$ او $x=0$، $x=-\sqrt{\frac{3}{2}}$ کې د تابع دویم مشتق صفر دی یا $f''(x)=0$ علامه بدلوي او په دې ټکو کې مماس رسمیدلی شي چې هغه ټکی د انعطاف ټکی دی.



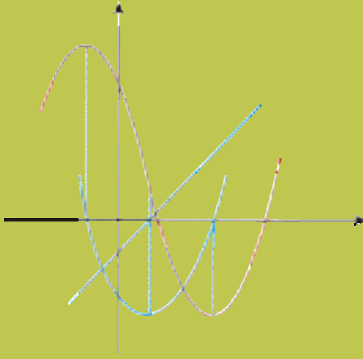
**پوښتنې**

1. د $f(x)=x^2-4$ د تابع محدبیت او مقعریت وټاکئ.
2. د $f(x)=-2x^2-1$ د تابع د انعطاف نقطه وټاکئ.

## د منحنيګانو رسمول

## د دويمي درجې تابع ګانو ګراف

د مخامخ شکل په اړه خپل نظر بيان کړئ.






- د $f(x)=x+1$ د تابع ګراف د $f(x)=-x+1$ د تابع له ګراف سره پرتله کړئ.
- د $y=ax^2+bx+c$ د تابع د تعريف ساحه و ټاکئ آيا دا تابع متمادي ده؟
- د نوموړې تابع لومړی مشتق پيدا او د Maximum او Minimum ټکي او د تناظر محور يې وټاکئ.
- د تابع ليميټ په هغه صورت کې پيدا کړئ چې $x\to\pm\infty$ وکړي.
- له محورونو سره د تقاطع ټکي و ټاکئ.
- د تحولاتو جدول ترتيب او نوموړی منحني رسم کړئ.

د پورته فعاليت پايله داسې بيانوو:

1- د تابع د تعريف ساحه: ليدل کېږي چې تابع د متحول د ټولو قيمتونو لپاره تعريف شوی ده، يعنې:

$$D_f\to(-\infty,+\infty)$$

نو تابع د خپل تعريف په ساحه کې متمادي ده.

2- د تابع د بحراني ټکو او د تناظر محور ټاکل:

$$f'(x)=2ax+b=0$$
$$f'(x)=0$$
$$2ax+b=0$$
$$2ax=-b$$
$$x=\frac{-b}{2a}$$

د $x=\frac{-b}{2a}$ قیمت په اصل تابع کې وضع کوو:

$$y=a(-\frac{b}{2a})^2+b(-\frac{b}{2a})+c \Rightarrow a\cdot\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{2a}+c=0$$

$$y=\frac{b^2-2b^2+4ac}{4a}=\frac{-b^2+4ac}{4a} \Rightarrow \frac{4ac-b^2}{4a}$$

د $(-\frac{b}{2a}\ ,\ \frac{4ac-b^2}{4a})$ ټکی بحراني یعني اعظمي یا اصغري دی.

الف: که $a>0$ وي، نو: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Rightarrow a>0$

تابع په $(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$ ټکي کې $Min$ لري.

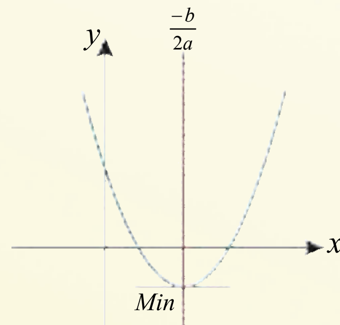
ب: که $a<0$ وي، نو: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \Rightarrow a<0$

تابع په $(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$ ټکي کې $Max$ لري.

3- د ګراف د رسمولو لپاره جدول ترتیب او ګراف یې رسموو:

$a>0$

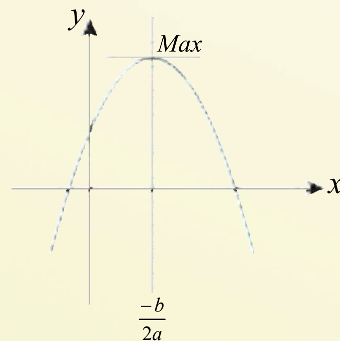
| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{-b}{2a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | ↘ | $\frac{4ac-b^2}{4a}$ | ↗ | $+\infty$ |




څرنګه چې $a>0$ د منحني خوله(جهت) پورته خواته او د $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4})$ اصغري نقطه ده.

$a<0$

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{-b}{2a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | | $-$ | |
| $y$ | $-\infty$ | ↗ | $\frac{4ac-b^2}{4a}$ | ↘ | $-\infty$ |




څرنګه چې $a<0$ د منحني خوله(جهت) ښکته خواته او د $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4})$ اعظمي نقطه ده.

**لومړی مثال**: د $f(x)=x^2-4x+3$ د تابع تحولات مطالعه او ګراف يې رسم کړئ.

**حل**:

1- د تابع د تعریف ساحه $(-\infty,+\infty)$ تا بع د ټولو حقیقي قیمتونو لپاره تعریف شوي ده، نو تـابع پـه دې انتـروال کې متمادي ده.

2- د تابع د منحني تقاطع د $x$ له محور سره:

$$\left.\begin{array}{l} y=0 \\ x^2-4x+3=0 \\ (x-1)(x-3)=0 \\ x-1=0 \quad \Rightarrow \quad x=1 \\ x-3=0 \quad \Rightarrow \quad x=3 \end{array}\right\} \quad (1,0) \quad , \quad (3,0)$$

3- د تابع د منحني تقاطع د $y$ له محور سره:

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=0-4\cdot 0+3 \\ y=3 \end{array}\right\} \quad (0,3)$$

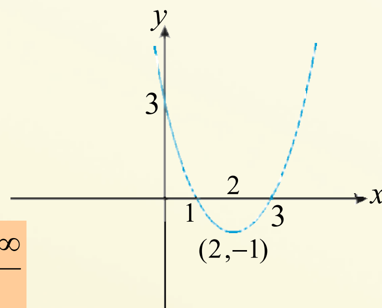
4- د تابع د extreme ټکو د پیدا کولولپاره د لومړي مشتق صفري ټکي پیدا او جدول يې ترتیبوو:

$$f'(x)=2x-4=0 \quad \Rightarrow \quad 2x=4 \quad \Rightarrow \quad x=2$$

$$f(2)=2^2-4\cdot 2+3=-1 \ \} \ \Rightarrow \ V(2,-1)\min$$

$$x\to\pm\infty \quad \Rightarrow \quad f(x)\to\pm\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left[x^2-4x+3\right]=+\infty$$




| $x$ | $-\infty$ | 0 | 1 | 2 | 3 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ | |
| $y$ | $-\infty \searrow$ | $3 \searrow$ | $0 \searrow$ | $-1 \nearrow$ (Min) | $0 \nearrow$ | $+\infty$ |

**دویم مثال**: د $f(x)=-x^2+2x$ د تابع تحولات مطالعه او ګراف يې رسم کړئ.

**حل**: لیدل کیږي چې تابع د ټولو قیمتونو لپاره تعریف شوي ده، نو:

1- د تابع د تعریف ساحه عبارت ده له: $(-\infty,+\infty)$ چې په دې ساحه کې تابع متمادي ده.

2- د تابع د منحني د تقاطع ټکی د $x$ له محور سره:

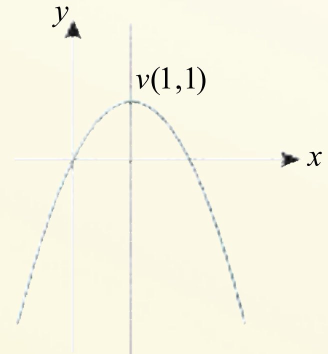
$$f(x)=0$$
$$-x^2+2x=0$$
$$x(-x+2)=0$$
$$x_1=0 \qquad (0,0)$$
$$-x+2=0$$
$$x_2=2 \qquad (2,0)$$

د تقاطع ټکی

3- د تابع د منحني تقاطع د $y$ له محور سره:

$$x=0$$
$$f(x)=-x^2+2x$$
$$f(x)=0+2\cdot 0$$
$$f(x)=0 \qquad (0,0)$$

4- د تابع د extreme نقطو د پیداکولو لپاره د تابع لومړی مشتق پیداکوو او جدول یې ترتیب او ګراف یې رسموو:




$$D_f \to (-\infty,+\infty)$$
$$f(x)=-x^2+2x$$
$$f'(x)=-2x+2=0$$
$$-2x+2=0$$
$$-2x=-2$$
$$\left.\begin{array}{l} x=1 \\ f(1)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow V(1,1)Max$$

| $x$ | $-\infty$ | 0 | 1 | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | + | − | − | |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ | 0 ↗ | 1 (Max) ↘ | 0 ↘ | $-\infty$ |

په جدول کې لیدل کېږي چې د مشتق علامه د مثبت څخه منفي ته او یا د تزاید حالت څخه تناقص ته شکل بدلوي، نو تابع د $(1,1)$ په ټکي کې اعظمي ده.

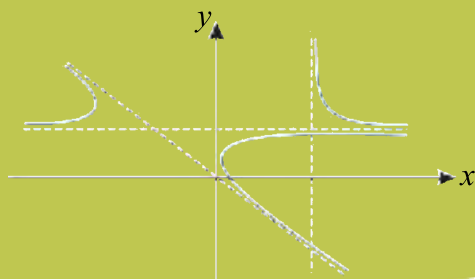


## پوښتنې

1. د $f(x)=2x^2-x-1$ د تابع ګراف رسم کړئ.
2. د $f(x)=x^2-x-2$ د تابع د ګراف بدلونونه وڅېړئ او ګراف یې رسم کړئ.

## د توابعو د ګرافونو مجانبونه

شکل ته پام وکړئ ټکی ټکی کرښې د څه په نامه یادېږي، نومونه یې واخلئ.





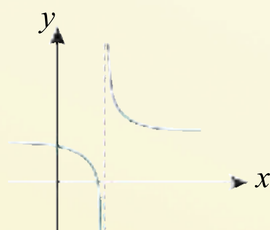


- مجانبونه څه ډول کرښې دي؟
- مجانبونه، منحنيګانې په کومو ټکو کې قطع کوي؟

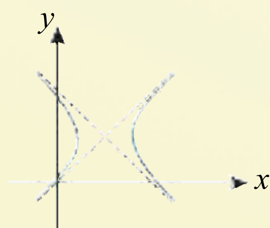
د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

**مجانبونه**: هغه مستقیمې کرښې دي چې د منحني د ګراف لپاره د لاربښود حیثیت لري او د منحني کرښه قطع کړي، هغه تابع ګانې چې د متحول د ځینو قیمتونو لپاره غیر متمادي وي، مجانبونه لري او په درې ډوله دي.

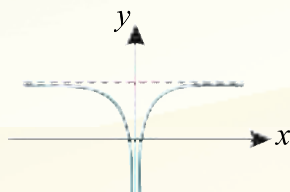
1- **عمودي مجانب**: د $y = f(x)$ تابع عمودي مجانب لري چې $x \to a$ او $y \to \infty$ وکړي، یعنې $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ شي یا په بل عبارت په کسري تابع ګانو کې که چېرې د کسر مخرج مساوي په صفر شي، نوموړی تابع بې‌نهایت خوا ته تقرب کوي، نو ددې ډول مجانب د پیداکولو لپاره د کسر مخرج له صفر سره مساوي وضع کوو.




2- **مایل مجانب**: د $y = f(x)$ کسري تابع کله چې د صورت او مخرج د تقسیم حاصل د یوه مستقیم خط په شکل ($y = ax + b$) لاسته راشي داسې چې $a \neq 0$ وي په لاس راځي او دا هغه وخت امکان لري چې تابع د مایل مجانب لرونکی وي، یعنې د متحول د صورت درجه د متحول د مخرج له درجې څخه د یو واحد په اندازه لوړه وي.



په یاد ولرئ چې که یوه تابع د افقي مجانب لرونکي وي، مایل مجانب نه لري او بر عکس که چیرې مایل مجانب ولري افقي مجانب نه لري.




3- **افقي مجانب**: یوه تابع هغه وخت د افقي مجانب لرونکې ده چې که $x \to \pm\infty$ وکړي د تابع قیمت یو ثابت مقدار شي او یا په بل عبارت یوه تابع هغه وخت د افقي مجانب لرونکې ده چې که $x \to \pm\infty$ وکړي، نو $y \to c$ ته تقرب کوي، یعنې $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = c$ شي.

**لومړی مثال**: د $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-4}$ تابع عمودي او افقي مجانب پیدا کړئ.

**حل**: د عمودي مجانب د پیدا کولو لپاره د کسر مخرج مساوي په صفر وضع کوو، لرو چې:

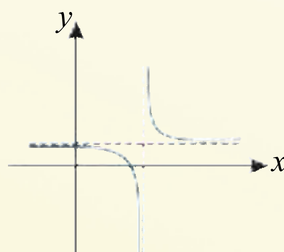
$$2x-4=0 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2$$

نو $x=2$ د تابع عمودي مجانب دی.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x+1}{2x-4}\right) = \frac{1}{2}$$

افقي مجانب عبارت دی له: $y = \dfrac{1}{2}$

| $x$ | $-1$ | $0$ | $+1$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | $0$ | $-\frac{1}{4}$ | $-1$ |




**دویم مثال**: د $y = \dfrac{x^2+2x-1}{x}$ تابع د منحني مجانبونه وټاکئ.

**حل**:

1- مایل مجانب: ددې مجانب د پیدا کولو لپاره د تابع صورت د تابع پر مخرج ویشو:

$$y = \frac{x^2+2x-1}{x} = x+2-\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad y = x+2$$

2- عمودي مجانب: د دې مجانب د پیدا کولو لپاره د تابع مخرج مساوي په صفر وضع کوو:

$$y = \frac{x^2+2x-1}{x} \quad \Rightarrow \quad x=0$$

3- افقي مجانب: څرنګه چې تابع مایل مجانب لري، نو افقي مجانب نه لري.

**دريم مثال**: د $f(x)=\dfrac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}$ تابع مجانبونه وټاکئ.

**حل**:

1- عمودي مجانب: د تابع مخرج مساوي په صفر وضع کوو:

$$(x+1)(x-2)=0$$

$$\left.\begin{array}{l} x+1=0 \\ x_1=-1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x-2=0 \\ x_2=2 \end{array}$$

نو $x=2$ او $x=-1$ د تابع عمودي مجانبونه دي.

2- افقي مجانب: د افقي مجانب د پيدا کولو لپاره د تابع لېميټ په لاس راوړو:

$$y=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}=1$$

نو $y=1$ د تابع افقي مجانب دی.

3- څرنګه چې تابع افقي مجانب لري، نو مايل مجانب نه لري.

**د مجانبونو د ټاکلو عمومي طريقه**:

که چېرې د $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ په ناطقه تابع کې $m$ او $n$ په ترتيب سره د صورت او مخرج درجې وي، نو:

**الف**: که $m<n$ وي، نو د $x$ محور افقي مجانب دی.

**ب**: که $m=n$ وي، نو $y=b$ افقي مجانب دی، داسې چې $b$ د $m$ او $n$ د درجو د حدودو د ضريبونو نسبت دی.

**ج**: که چېرې $m>n$ وي، نو افقي مجانب نه لري، ولې د مايل مجانب احتمال يې شته.

**ډ**: که چېرې $m=n+1$ وي(که د صورت درجه د يوه واحد په اندازه له مخرج څخه لويه وي) تابع هرو مرو مايل مجانب لري، په دې حالت کې افقي مجانب نه لري.



**پوښتنې**

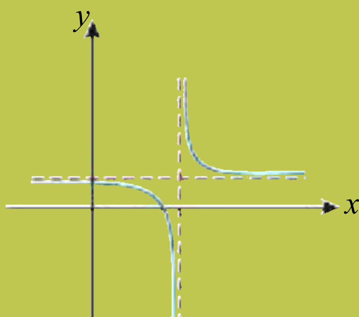
د لاندې توابعو مجانبونه وټاکئ.

1) $f(x)=\dfrac{3x-6}{x^2-x-2}$ 2) $f(x)=\dfrac{-2x^2}{x^2+1}$

3) $f(x)=\dfrac{8}{x^2-4}$

## د هوموګرافیک تابع ګانو ګراف

شکل ته پاملرنه وکړئ دا شکل د څه ډول تابع ګراف دی؟ افقي او عمودي مجانبونه یې وښیئ.







- هوموګرافیک تابع څه ډول تابع ده، په یوه مثال کې یې واضح کړئ.
- د $y=\frac{1}{x}$ د تابع ګراف رسم کړئ.
- د نوموړي تابع مجانبونه لومړی پیدا او بیا یې رسم کړئ.
- د تابع د ګراف تقاطع د $x$ او $y$ له محورونو سره پیدا کړئ.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

هغه تابعګانې چې د $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ شکل ولري، هوموګرافیک تابع ګانې بلل کېږي، داسې چې $c\neq 0$ وي. دا ډول توابع دوه مجانبونه لري چې:

1- افقي مجانب یې:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{ax}{x}+\frac{b}{x}}{\frac{cx}{x}+\frac{d}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{a+\frac{b}{x}}{c+\frac{d}{x}} \Rightarrow y=\frac{a}{c}$$

2- عمودي(قایم) مجانب یې:

$$cx+d=0 \quad\Rightarrow\quad cx=-d \quad\Rightarrow\quad x=-\frac{d}{c}$$

**لومړی مثال**: د $f(x)=\frac{2x-1}{x-3}$ د تابع بدلونونه وڅېړئ او ګراف یې رسم کړئ.

**حل**:

$$x-3=0$$
$$x=3$$

1. څرنګه چې د تابع مخرج د $x=3$ په قیمت کې صفر کېږي، نو تابع پرته له $x=3$ څخه د متحول په ټولو قیمتونو کې معینه ده، یعنې د تابع د تعریف ساحه ټاکو: $Domain=IR\setminus\{3\}$

2. د تابع د منحني تقاطع د $x$ له محور سره:

$$\left.\begin{aligned} &f(x)=0 \\ &2x-1=0 \\ &2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \end{aligned}\right\} (\frac{1}{2},0)$$

3. د تابع د منحني تقاطع د $y$ له محور سره:

$$\left. x=0 \Rightarrow f(0)=\frac{2\cdot 0-1}{0-3}=\frac{1}{3} \right\} (0,\frac{1}{3})$$

4. د مجانبونو ټاکل:

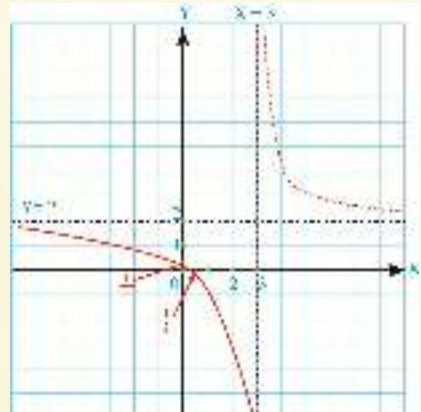
**الف**- افقي مجانب: $y=2$ , $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x-3}=2$ يا $f(x)=\frac{a}{c}=\frac{2}{1}=2$

**ب**- عمودي مجانب: $x-3=0 \Rightarrow x=3$ يا $x=-\frac{d}{c}=-\frac{-3}{1}=3$

5. د تابع د extreme ټکي پيدا کوو او جدول يې ترتيب او ګراف يې رسموو:

$$f'(x)=\frac{2(x-3)-(2x-1)}{(x-3)^2}=\frac{-5}{(x-3)^2}<0$$

$$f''(x)=\frac{0\cdot(x-3)^2-(-5)\cdot 2(x-3)}{(x-3)^4}=\frac{10(x-3)}{(x-3)^4}=\frac{10}{(x-3)^3}$$



| $x$ | $-\infty$     3 | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $-$ |
| $f''(x)$ | $-$ | $+$ |
| $f(x)$ | $2 \searrow -\infty$ | نه دی تعريف شوی $+\infty \searrow 2$ |

**دويم مثال**: د $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ د تابع د ګراف بدلونونه و څېړئ او ګراف يې رسم کړئ.

**حل**: $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

1- د تابع د تعريف ساحه $D_f \to IR\setminus\{-1\}$ يعني تابع په $x=-1$ ټکي کې تعريف شوې نه ده.

2- د تابع د منحني تقاطع د $x$ له محور سره: $y=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow (1,0)$

3- د تابع د منحني تقاطع د $y$ له محور سره: $x=0 \Rightarrow y=\dfrac{0-1}{0+1}=-1 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow (0,-1)$

4- د مجانبونو ټاکل:

**الف**- عمودي مجانب: $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

**ب**- افقي مجانب: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x-1}{x+1} \Rightarrow f(x)=y=1$

5- د تابع extreme نقطې پیدا کوو، جدول یې ترتیب او ګراف یې رسموو:

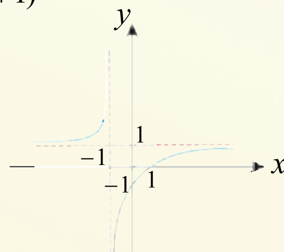
$$f(x)=\frac{x-1}{x+1}$$

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x+1)-1\cdot(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}>0$$

$$f''(x)=\frac{0\cdot(x+1)^2-2\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{-4(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{-4}{(x+1)^3}$$

| $x$ | $-\infty$ | |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $+$ |
| $f''(x)$ | $+$ | $-$ |
| $f(x)$ | $1 \nearrow +\infty$ | $-\infty \nearrow 1$ |

نه دی تعریف شوی




**دریم مثال**: غواړو د $f(x)=\dfrac{2x-5}{x}$ تابع ګراف رسم کړو.

**حل**:

1- د تابع د تعریف ساحه تر خېړنې لاندې نیسو لیدل کیږي چې تابع پرته له $x=0$ څخه نور د متحول د ټولو قیمتونو لپاره معینه ده، یعني: $D_f \to IR\setminus\{0\}$

2- د محورونو سره د تقاطع ټکي

**الف**- د $x$ له محور سره تقاطع:

$$f(x)=0 \Rightarrow \frac{2x-5}{x}=0$$

$$\left.\begin{aligned} &2x-5=0 \\ &2x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow (2.5,0)$$

**ب**- د $y$ له محور سره تقاطع: د $x=0$ لپاره د $f(x)$ تابع تعریف شوې نه ده، نو له $y$ محور سره تقاطع نه لري.

**3- مجانبونه**:

**الف**- عمودي مجانب: څرنګه چې په مخرج کې یوازې $x$ موجود دی، نو $x=0$ یې عمودي مجانب دی چې د $y$ محور کېږي.

**ب**- افقي مجانب: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\dfrac{2x-5}{x}\right]=2$ نو $y=2$ د تابع افقي مجانب دی.

4- د بحراني ټکو پیدا کول: د بحراني ټکو د پیدا کولو لپاره د تابع لومړی مشتق پیدا کوو

$$f(x)=\frac{2x-5}{x}$$

$$f'(x)=\frac{2\cdot x-(2x-5)}{x^2}=\frac{2x-2x+5}{x^2}$$

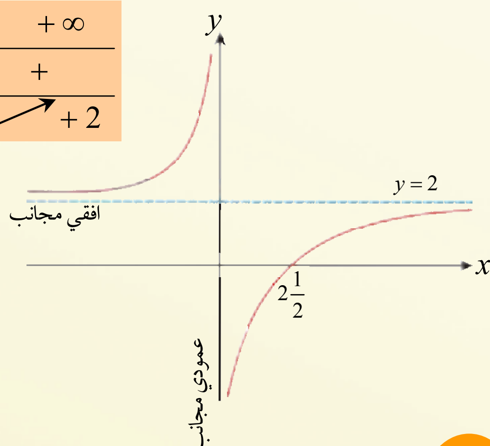
$$f'(x)=\frac{5}{x^2}>0$$

څرنګه چې $f'(x)>0$ دی، نو تابع متزایده ده.

د ګراف د رسمولو لپاره د تابع تحولات په جدول کې ترتیبوو:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2.5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | ‖ | $+$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $2$ | ↗ $+\infty$ | ‖ | $-\infty$ ↗ | $0$ | ↗ | $+2$ |

نه دی تعریف شوی




## پوښتنې

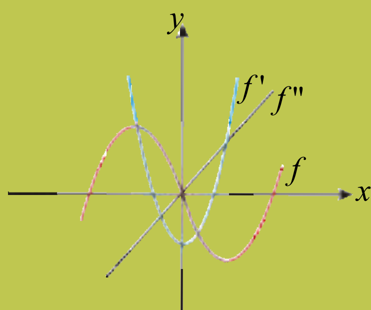
1. د $f(x)=\dfrac{x-1}{x+3}$ تابع بدلونونه وڅېړئ او رسم یې کړئ.

2. د $f(x)=\dfrac{x}{x-4}$ تابع بدلونونه وڅېړئ او رسم یې کړئ.

## د دريمې درجې يو مجهوله تابع گراف $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ، $a \neq 0$

مخامخ شكل د ځينو توابعو گرافونه راښيي تاسې د هرې

تابع د گراف په هكله خپل نظر بيان كړئ.







- د $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ تابع په اړه فكر وكړئ او ووايئ چې تابع څومه درجه تابع ده؟
- د نوموړې تابع ضريبونه او ثابت حد وليكئ.
- د نوموړې تابع دويم مشتق پيدا كړئ.

د پورته فعاليت پايله داسې بيانوو:

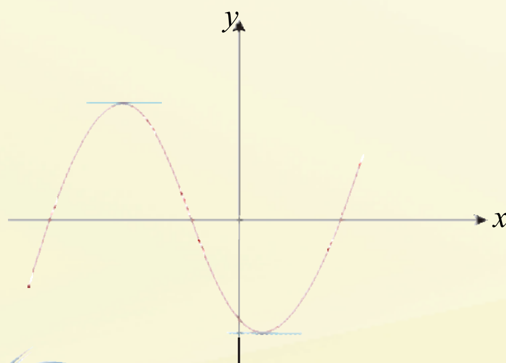
1. د $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ، په دريمه درجه تابع كې چې $a > 0$ وي داسې په پام كې نيسو. كه چېرې د تابع لومړی مشتق پيدا كړو دويمه درجه تابع په لاس راځي، نو د $f'(x) = 0$ لپاره د دويمې درجې د معادلې حل په پام كې نيسو او $\Delta$ يې مطالعه كوو كه چېرې د معادلې $\Delta$ له صفر څخه لوی $(\Delta f' > 0)$ وي، نو معادله(د تابع مشتق) دوه حله لري، كه چېرې $a > 0$ وي منحنی له كيڼ لوري څخه ښي لوري ته يوه نسبي اعظمي نقطه (Local Maximum) او يوه نسبي اصغري (Local Minimum) لري.

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$a > 0 \Rightarrow \Delta f' > 0$

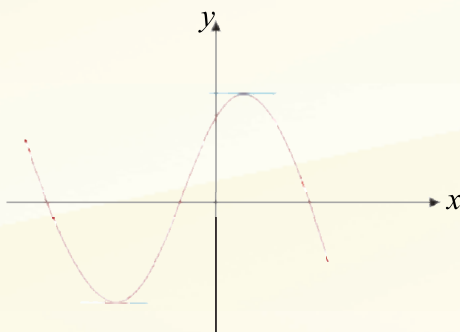
| $x$ | $-\infty$ | $x_1$ | | $x_2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − | 0 | + |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ | | ↘ | | ↗ $+\infty$ |



2. د $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ، پـه تـابع کـې کـه $a<0$ ، $f'(x)=0$ او $\Delta f'(x)>0$ معادلـه دوه جذرونـه لـري، کـه چېـرې $\Delta f'>0$ نـو منحنـي لـه کـين لـوري څخـه ښـی لـوري تـه يـوه نـسبي اصغری(Local Minimum) او يوه نسبي اعظمي(Local Minimum) نقطه لري.

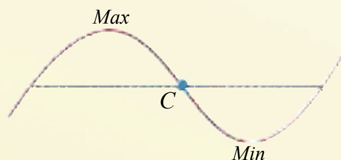
$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$
$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$
$$a<0 \Rightarrow \Delta f'>0$$

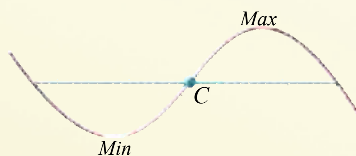
| $x$ | | $x_1$ | | $x_2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | | ↗ | | ↘ $-\infty$ |




3. که د دريمې درجې تابع منحني نسبي بحراني Extreme ولري، د Extreme ټکو د منځني ټکي يا د انعطاف د نقطې مختصات يې:

$$I(x_c, y_c) = \left(\frac{x_{max}+x_{min}}{2}, \frac{y_{max}+y_{min}}{2}\right)$$




4. د دريمې درجې تابع د تناظر ټکی د تابع د انعطاف ټکی:

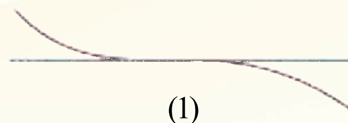
$$f'(x)=0$$
$$3ax^2+2bx+c=0$$

چې د تناظر ټکي يې وروسته د نوموړې معادلې له حل څخه د تناظر مرکز $x=-\dfrac{b}{3a}$ په لاس راځي.

5. د $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ په تابع کې که $a<0$ وي او له $f'(x)=0$ سره وضع شي او $\Delta f'(x)=0$ نو معادله یو یا دوه مساوي جذرونه لري په هغه صورت کې چې $f'(x)\leq 0$ وي، نو په دې صورت تابع، متناقصه ده او که چیرې $f'(x)\geq 0$ وي، نو په دې صورت کې تابع متزایده ده.



(2)



(1)

**لومړی مثال**: د $f(x)=(x-1)(x+2)^2$ تابع تحولات وڅیړئ او ګراف یې رسم کړئ.

**حل**: لومړی د تابع Extreme ټکو مختصات په لاس راوړو، وروسته د لومړي مشتق په مرسته ګورو چې تابع په کومه برخه کې متزایده او په کومه برخه کې متناقصه ده. له محورونو سره د تقاطع ټکي پیدا کوو او د اعظمي او اصغري نقطو د تشخیص او د انعطاف نقطو د پیدا کولو لپاره د تابع دویم مشتق په کار وړو د تحولاتو جدول یې ترتیبوو او بیا یې ګراف رسموو: $f(x)=x^3+3x^2-4$

$$f'(x)=3x^2+6x$$
$$3x^2+6x=0$$
$$x(3x+6)=0$$
$$x_1=0 \quad , \quad 3x+6=0 \quad \Rightarrow \quad x_2=-2$$
$$f'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=0 \quad , \quad x_2=-2$$
$$f(0)=0^3+3\cdot 0^2-4=-4$$
$$f(-2)=(-2)^3+3(-2)^2-4$$
$$=-8+12-4=0$$
$$f''(x)=0 \quad \Rightarrow \quad 6x+6=0$$
$$6x=-6$$
$$x=-1$$

د انعطاف د نقطې د لاسته راوړلو لپاره $x=-1$ په اصلي تابع کې وضع کوو چې د $f(x)$ قیمت لاسته راځي:

$$f(-1)=(-1-1)(-1+2)^2=-2$$

د انعطاف ټکی: $I(-1,-2)$

له محورونو سره تقاطع:

الف- د $x$ له محور سره تقاطع:

$$y=0$$

$$(x-1)(x+2)^2=0$$

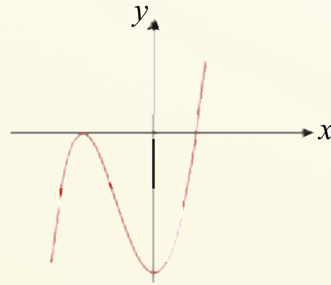
$$\left.\begin{matrix} x-1=0 \\ x=1 \\ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} (x+2)^2=0 \\ x+2=0 \\ x_2=-2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (1,0)\ ,\ \ (-2,0)$$

ب- د $y$ له محور سره تقاطع:

$$x=0$$

$$y=0^3+3\cdot 0^2-4=-4 \quad \Rightarrow (0,-4)$$

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $-$ | $-$ | $+$ | |
| $f''(x)$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty \nearrow$ | $0$ (max) $\searrow$ | $-2 \searrow$ | $-4$ (min) $\nearrow$ | $+\infty$ |




**دويم مثال**: د $f(x)=-x^3+3x^2$ د تابع تحولات وڅېړئ اوګراف يې رسم کړئ.

**حل**: د تابع لومړی مشتق پيداکوو او وروسته يې صفري نقطې ټاکو او د تابع اعظمي او اصغري نقطې په لاس راوړو.

-1

$$f(x)=-x^3+3x^2$$

$$f'(x)=-3x^2+6x$$

$$f'(x)=0 \quad \Rightarrow \ -3x^2+6x=0 \quad \Rightarrow \ x(-3x+6)=0$$

$$x_1=0 \quad , \quad -3x+6=0 \quad \Rightarrow \ -3x=-6 \quad \Rightarrow \ x_2=2$$

اعظمي او اصغري ټکي عبارت دي له:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=-0^3+3\cdot 0^2=0 \\ f(2)=-2^3+3\cdot 2^2=4 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,0)\ ,\quad (2,4)$$

2- محورونو سره تقاطع:

الف- د $x$ له محور سره تقاطع:

$$\left.\begin{array}{l} y=0 \\ -x^3+3x^2=0 \\ x^2(-x+3)=0 \\ x_1=0\quad ,\qquad -x+3=0 \\ \qquad\qquad\quad x_2=3 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,0)\qquad ,\qquad (3,0)$$

ب- د $y$ له محور سره تقاطع:

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ f(x)=-0^3+3\cdot 0^2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,0)$$

3- د انعطاف د نقطې د پیداکولو لپاره $f''(x)$ مطالعه کوو:

$$f''(x)=-6x+6=0$$

$$x=1$$

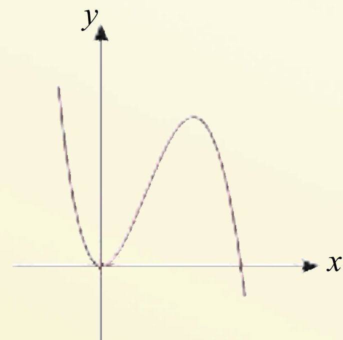
$$f(x)=-x^3+3x^2$$

$$f(1)=2 \quad \Rightarrow \quad I(1,\ 2)$$

4- اوس یې جدول ترتیبوو او ګراف یې رسموو:

| $x$ | $-\infty$ | 0 | | 1 | | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | | $-$ |
| $f''(x)$ | $+$ | | $+$ | 0 | $-$ | | $-$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | 0 | ↗ | | ↗ | 4 | ↘ $-\infty$ |
| $f(x)$ | ∪ | | ∪ | | ∩ | | ∩ |

نسبي $Min$      نسبي $Max$



**دریم مثال**: د $f(x)=x^3-3x^2+x+1$ د تابع د تناظر د مرکز مختصات پیدا کړئ.

**حل**: پوهیږو چې د تناظر مرکز د $x=\frac{-b}{3a}$ له رابطې څخه لاسته راځي، نو:

$$x=\frac{-b}{3a}=\frac{-(-3)}{3\cdot 1}=1 \quad \Rightarrow \quad f(1)=1^3-3(1)^2+1+1=0$$

$C(1,0)$ د تناظر د مرکز مختصات



## پوښتنې

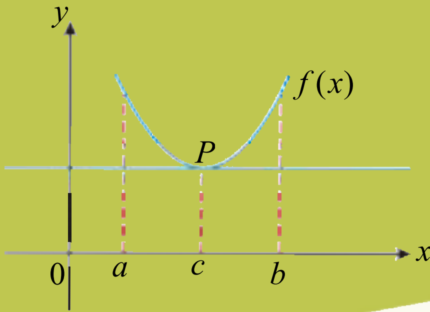
1. د لاندې تابع ګانو د تحولاتو جدول ترتیب او ګرافونه يې رسم کړئ.

$a)\ f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+x+1 \quad , \quad b)\ f(x)=-(x-1)^3$

2- د $f(x)=-2x^2+6x-3$ د تناظر د مرکز مختصات پیدا کړئ.

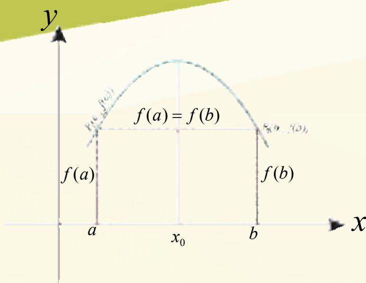
## د رول قضیه

### *Rolle Theorem*



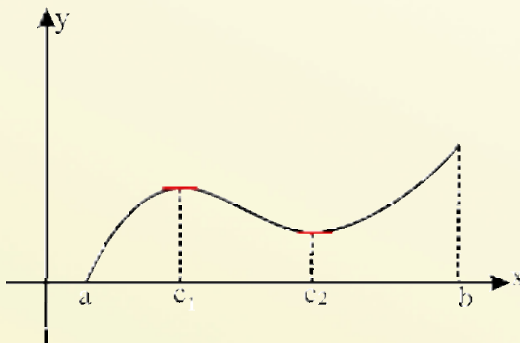

په مخامخ شکل کې د $f(x)$ تابع او د $\Delta$ مستقیم خط یو له بل سره څه اړیکې لري او $f'(c)$ له څه سره مساوي دی.




- په مخامخ شکل کې د $(a,b)$ په انټروال کې د $f(x)$ په منحني باندې داسې ټکئ یا ټکي شته چې له هغو څخه په منحني داسې مماس رسم شي چې د $x$ له محور سره موازي وي.
- د $f(x)$ تابع په کوم انټروال کې متمادي او په کومه فاصله کې د مشتق وړده.
- که چېرې $f(a) = f(b)$ وي، نو د $x_0$ ټکي په $(a,b)$ انټروال کې وټاکئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې قضیه بیانولای شو:




**قضیه**: که چېرې د $f(x)$ تابع د $a \le x \le b$ په انټروال کې متمادي او د $a < x < b$ په انټروال کې د مشتق وړ وي او $f(a) = f(b)$ وي، نو لږ تر لږه د $x_0$ یو ټکی په $a < x_0 < b$ انټروال کې شته چې د $f'(x_0) = 0$ شي.

**ثبوت**: خرنګه چې د $f(x)$ تابع په ورکړل شوی انټروال کې متمادي او د مشتق وړ ده، نو بحراني Extreme ټکی لري.

1- که $f(x)=c$ ثابته تابع وي، نو واضح ده چې $f'(x)=0$ ده.

2- که د $f(x)$ تابع ثابته نه وي، او $x_2, x_1 \in (a,b)$ او $f(x_1)>0$ وي، نو تابع په $x_0 \in [a,b]$ کې یو Maximum قیمت لري چې $f(x_0) \geq f(x_1) > 0$ شي او همدا راز که $f(x_2)<0$ وي، نو تابع یو اصغري Minimum قیمت لري.

خرنګه چې په Extreme نقطو کې د تابع مشتق صفر دی، نو $f'(x_0)=0$ کېږي.

**لومړی مثال**: د رول قضیه د $f(x)=\cos x$ د تابع لپاره په $[a,b]=[\pi, 5\pi]$ فاصله کې تطبیق کړئ.

**حل**: خرنګه چې $f(\pi)=f(5\pi)=-1$ سره دی، نو د $f(x)$ تابع د هره $x$ لپاره د مشتق وړ ده، نو د $(\pi, 5\pi)$ په انټروال کې متمادي او په $(\pi, 5\pi)$ په انټروال کې مشتق منونکی ده چې د Rolle د قضیې مطابق په $(\pi, 5\pi)$ کې لږ تر لږه یو $x_0$ موجود دی چې د هغه قیمت لپاره $(\cos x)'=0$ شي. خرنګه چې $(\cos x)'=-\sin x$ دی، نو باید $-\sin x=0$ معادلې لږ تر لږه یو حل په $(\pi, 5\pi)$ کې موجود وي.

$-\sin x=0 \Rightarrow \sin x=0$ دا معادله په $(\pi, 5\pi)$ کې درې خله $4\pi, 3\pi, 2\pi$ قیمتونه اخېستلای شي.

**دویم مثال**: د رول قضیه د $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ تابع په $[a,b]=[-1,1]$ فاصله کې تطبیق کړئ.

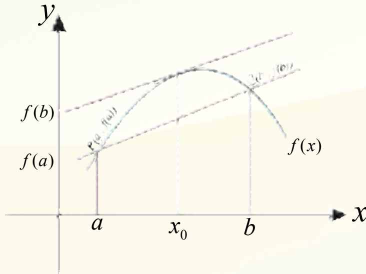
**حل**: لیدل کېږي چې تابع د پیل او پای په ټکو کې د مشتق وړ نه ده، ولې د رول د قضیې د تطبیق وړ ده ځکه $f(-1)=f(1)=0$ دی $f(0)$ تابع په $[-1,1]$ کې متمادي ده او په $[-1,1]$ کې د $x_0$ یو عدد شته چې $f'(x_0)=0$ شي او هغه $x_0=0$ دی.

د $y'(x)=\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u}}$ فورمول څخه په ګټه اخېستنې سره مشتق په لاس راوړو:

$$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \Rightarrow \quad f'(0)=\frac{0}{\sqrt{1-0^2}}=0$$

## د متوسط قیمت قضیه(لاگرانژقضیه):




مخامخ شکل په پام کې و نیسئ:

- د یوې مستقیمې کرښې میل له کومې رابطې څخه په لاس راځي؟
- د $\overline{PQ}$ د مستقیمې کرښې میل پیدا کړئ.
- د $\overline{PQ}$ د کرښې میل د $f(x)$ د تابع له مشتق سره څه اړیکه لري؟

له پورتني فعالیت څخه قضیه داسې بیانوو:

**قضیه**: که چیرې $f(x)$ د $[a,b]$ په فاصله کې متمادي او د $(a,b)$ په فاصله کې د مشتق وړ وي د $(a,b)$ له انټروال څخه د $c$ یو عدد شته دی داسې چې: $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

یعنې: $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ دی.

**ثبوت**: یوه مرستندویه تابع په پام کې نیسو، لیدل کیږي چې: $g(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot x$

$$g(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot a=\frac{f(a)b-f(b)a}{b-a}\quad \text{.........}\ \text{I}$$

$$g(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot b=\frac{f(a)b-f(b)a}{b-a}\quad \text{.........}\ \text{II}$$

نو $g(a)=g(b)$ سره دی د رول د قضیې پر بنسټ سره د $c$ عدد د $(a,b)$ انټروال کې شته دی چې $g'(c)=0$ دی، نو:

$$g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\ \Rightarrow\ g'(x)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0\qquad \Rightarrow\ f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\Rightarrow\ f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

**مثال**: د $f(x)=2x^3-8x+1$ په تابع کې د متوسط قیمت قضیه په $[a,b]=[1,3]$ کې وڅیړئ.

**حل**: لیدل کیږي چې د $f(x)$ تابع په $[1,3]$ کې متمادي او په $(1,3)$ کې د مشتق وړ ده، نو د متوسط قیمت له قضیې سره سم په $(1,3)$ کې یو $x_0$ شته داسې چې:

$$f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{36}{2}=18$$

د c د پیداکولو لپاره لرو:

$$f'(x_0)=6x^2-8=18 \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{26}{6}}$$

څرنګه چې $x=\sqrt{\frac{26}{6}}$ په $(1,3)$ کې ګډون لري، نو $x_0=\sqrt{\frac{13}{3}}$ دی.

او $x=-\sqrt{\frac{26}{6}}$ په $(1,3)$ فاصله کې واقع نه ده، نو د قبول وړ نه ده.



## پوښتنې

1- که چیرې د $f(x)=\sqrt{x(4-1)}$ تابع د $[0,4]$ په انټروال کې راکړل شوې وي د $x_0$ قیمت داسې پیدا کړئ چې د رول قضیه په پورتني تابع کې صدق وکړي.

2- که د $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x$ تابع راکړل شوې وي د $x_0$ قیمت د $[0,3]$ په فاصله کې داسې وټاکئ چې د رول قضیه په هغې کې صدق وکړي.

## 3- د هوپيتال قاعده (L' Hopitall)

مخامخ مساوات څه بيانوي؟

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$




- د $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$ د تابع لېميټ په هغه صورت کی پيدا کړئ چې $x\to 1$ ته تقرب وکړي.
- د پورتني تابع د صورت او مخرج مشتق پيدا او د تابع له لېميټ سره يې پرتله کړئ.
- د $f(x)=\dfrac{3x^4-3x^2-4x-1}{2x^2-4x^3+2x^4}$ د تابع لېميټ په هغه صورت کې پيدا کړئ چې $x\to\infty$ تقرب وکړي.
- د پورتني تابع د صورت او مخرج مشتق پيدا او د تابع له لېميټ سره يې پرتله کړئ.

له پورتني فعاليت څخه دا قاعده بيانوو:

**د هوپيتال قاعده:**

که د $f(x)$ او $g(x)$ تابع ګانې د $(a,b)$ په انتروال کې تعريف او د مشتق وړ وي.

که چېرې $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ د لېميټ نسبت $x\to a$ قيمت کې د $\dfrac{0}{0}$ مبهم شکل او په $x\to\infty$ کې د $\dfrac{\infty}{\infty}$ شکل ونيسي. په دې حالت کې د تابع د لېميټ د پيدا کولو لپاره د $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ مشتق پيدا کوو او په هغه کې قيمتونه وضع کوو که بياهم د تابع شکل مبهم وي، مشتق نيولو ته ادامه ورکوو تر څو د ابهام شکل ختم شي د مثال په ډول:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{x^2-4}=\frac{2\cdot 2^2+2-10}{2^2-4}=\frac{0}{0}$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{4x+1}{2x}=\frac{4\cdot 2+1}{2\cdot 2}=\frac{9}{4}$$

يا

$$\lim_{x\to 2}\frac{(2x+5)(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{2x+5}{x+2}=\frac{2\cdot 2+5}{2+2}=\frac{9}{4}$$

**مثال**: د لوپيټال له قاعدې څخه په ګټه اخيستنې سره د لاندې توابعو لېميټونه پيدا کړئ.

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{x+\sin 2x}{x-\sin 2x} \qquad 2)\ \lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x-3} \qquad 3)\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+6}{7x^2-2x+1}$$

**لومړی ځواب**:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin 2x}{x-\sin 2x}=\frac{0+\sin 2\cdot 0}{0-\sin 2\cdot 0}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+\sin 2x)'}{(x-\sin 2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1+2\cos 2x}{1-2\cos 2x}=\frac{1+2}{1-2}=-3$$

**دويم ځواب**:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{3^4-81}{3-3}=\frac{81-81}{3-3}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x^4-81)'}{(x-3)'}=\lim_{x\to 3}\frac{4x^3}{1}=\frac{4\cdot 3^3}{1}=108$$

**دريم ځواب**:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+6}{7x^2-2x+1}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(3x^2-4x+6)'}{(7x^2-2x+1)'}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x-4}{14x-2}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(6x-4)'}{(14x-2)'}=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$$



**پوښتنې**

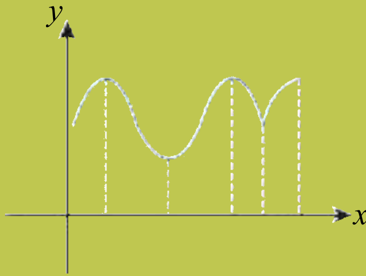
د لوپيټال له قاعدې څخه په ګټه اخيستنې سره لاندې لېميټونه پيدا کړئ.

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \quad , \quad b)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x^3-1}$$

$$c)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^3} \quad , \quad d)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{3x^3}$$

## د بحراني ټکو تطبيق

په مخامخ شکل کې تر ټولو لوړ ټکی او تر ټولو ټیټ ټکی وښیئ او دا ټکی د څه په نامه يادېږي.




مثالونه:

1مثال- دوه عددونه پیدا کړئ چې مجموعه یې 20 او د ضرب حاصل یې لوی ممکن قیمت ولري.

**حل**: که لومړی عدد ته $x$ وویل شي، نو دویم عـدد $20-x$ دی او د ضـرب حاصـل یـې د تـابع په شکل داسې: $f(x)=x(20-x)$ لیکو، څرنګه چې د $x$ عدد په $[0,20]$ انتروال کـې تحـول کـوي، نـو د تـابع مطلق اعظمي قیمت په $[0,20]$ کې لټوو:

$$f(x)=20x-x^2$$
$$f'(x)=0$$
$$20-2x=0$$
$$-2x=-20$$
$$x=10$$
$$f(10)=20\cdot10-10^2=200-100=100$$
$$f(0)=20\cdot0-0^2=0$$
$$f(20)=20\cdot20-20^2=400-400=0$$

لیدل کېږي چې (10 ، 100) د تابع اعظمي نقطه ده، نـو مطلـوب عددونـه $x_1=10$ او $x_2=10$ چې د ضرب حاصل یې 100 دی.

2 مثال- د یوه خوځنـده جسـم د حرکـت معادلـه د $x=(t-2)(t-3)$ پـه بڼـه راکـړل شـوې ده، د جسـم متوسط سرعت د $t_1=3$ او $t_2=4$ د وخت په واټنو کې پیدا کړئ.

**حل**: د منځني سرعت د تعریف په مرسته لیکلای شو چې:

$$\text{منځنی سرعت}=\frac{x_{(t_2)}-x_{(t_1)}}{t_2-t_1}=\frac{x_{(4)}-x_{(3)}}{4-3}=\frac{2-0}{4-3}=2$$

3مثال- د کرې د حجم او سطحې د مشتقونو تر منځ منځنی نسبت پیدا کړئ.

**حل**:

$$\text{د کرې حجم} = v_{(x)} = \frac{4}{3}\pi x^3 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{4}{3}\pi \cdot 3x^2 = 4\pi x^2$$

$$\text{د کرې مساحت} = S_{(x)} = 4\pi x^2 \Rightarrow \frac{ds}{dx} = 4\pi \cdot 2x = 8\pi x$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{4\pi x^2}{8\pi x} \Rightarrow \frac{dv}{ds} = \frac{1}{2}x$$

4مثال- د سانتي ګراد(C) او فارنهایت (F) د حرارت تر منځ $C = \frac{5}{9}(F-32)$ اړیکه شته، تاسې د (C) او (F) تر منځ منځنی نسبت وټاکئ.

**حل**: د منځنی سرعت د تعریف $\left(V_m = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ په مرسته لیکلای شو:

$$\frac{\Delta C}{\Delta F} = \frac{C(F+\Delta F) - C(F)}{\Delta F} = \frac{\frac{5}{9}(F+\Delta F-32) - \frac{5}{9}(F-32)}{\Delta F} = \frac{5}{9}$$

5مثال- یوه ځمکه چې مستطیلي شکل لري، محیط یې $200m$ دی، کېدای شي اعظمي Maximum مساحت یې پیدا کړئ.

**حل**: په ورکړل شوي محیط سره کولای شو، ډېر مستطیلونه رسم کړو، ولې شرط دا دی چې هغه مستطیل زموږ مطلوب دی چې مساحت یې تر ټولو زیات وي، نو که د مستطیل اوږدوالی په $x$ او سور یې په $y$ وښیو، نو لیکلای شو:

$$\text{میحط} = 2x + 2y = 200$$

$$\text{میحط} = x + y = 100 \quad \Rightarrow y = 100 - x$$

$$\text{مساحت} = x \cdot y$$

$$S = x(100-x) = 100x - x^2 \quad , \quad D_s = IR$$

$$x > 0 \quad , \quad y > 0 \Rightarrow 100 - x > 0 \quad \Rightarrow x < 100$$

اوس د $S = 100x - x^2$ په تابع کې $0 < x < 100$ انټروال کې د تابع اعظمي مساحت داسې پیدا کوو:

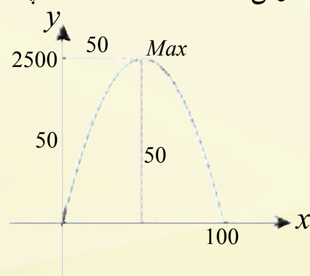
$$S' = 100 - 2x$$

$$S' = 0 \Rightarrow 100 - 2x = 0 \quad \Rightarrow x = 50 \quad \Rightarrow S_{(50)} = 2500$$

$$\lim_{x\to 0^+} S(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} S(x) = 0$$

| $x$ | 0 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|
| $S'$ | + | 0 | − |
| $S$ | 0 ↗ | 2500 | ↘ 0 |



په پایله کې له شکل څخه هم لیدل کېږي چې تر ټولو لوی مساحت هغه وخت لاسته راځي چې د مستطیل طول 50 واحده وي، نو مساحت 2500 واحد مربع کېږي.

6مثال- که د دوو عددونو مجموعه 200 وي، هغه عددونه داسې وټاکئ چې د مربعاتو مجموعه یې اصغري شي.

**حل**: که چېرې دا عددونه x او y وي، نو $x+y=200$ او که $x$ ، $x^2+y^2=T_{(x)}$ فرض کړو، نو:

$$T_{(x)}=x^2+y^2$$
$$=x^2+(200-x)^2$$
$$=x^2+x^2-400x+(200)^2$$
$$=2x^2-400x+40000$$
$$T'_{(x)}=4x-400$$
$$T'_{(x)}=0$$
$$4x-400=0$$
$$x=100$$

په پایله کې ویلای شو چې د مربعاتو تر ټولو کوچنی مجموعه عبارت ده له: $T_{(100)}=20000$

7مثال- د A ټکی د $y=\dfrac{2}{x}$ د منحني له پاسه حرکت کوي، تر ټولو کوچنی انتروال د A د نقطې او د مختصاتو د مبدې ترمنځ لاسته راوړو.

**حل**: د $y=\dfrac{2}{x}$ د تابع منحني پر مخ د A د نقطې مختصات $A(x,\dfrac{2}{x})$ دي، نو:

$$\overline{OA}=\sqrt{x^2{}_{(A)}+y^2{}_{(A)}}=\sqrt{x^2+\frac{4}{x^2}}$$
$$\overline{OA}^2=x^2+\frac{4}{x^2}=d^2 \Rightarrow d'_{(x)}=(x^2)'+(\frac{4}{x^2})'=2x-\frac{8x}{x^4}=2x-\frac{8}{x^3}$$
$$d'_{(x)}=\frac{2x^4-8}{x^3}$$
$$d'_{(x)}=0$$
$$2x^4=8$$
$$x_1=\sqrt{2} \quad , \quad x_2=-\sqrt{2}$$
$$d_{\sqrt{2}}=(\sqrt{2})^2+\frac{4}{(\sqrt{2})^2}=2+\frac{4}{2}=\frac{8}{2}=4$$
$$d_{-\sqrt{2}}=4$$

په پایله کې تر ټولو کوچنی فاصله له مبدا څخه 2 واحده ده.

8مثال- یو مکعب مستطیل چې قاعده یې مربع ده، په پام کې نیسو، که د دریو واړو بعدونو مجموعه 24 وي، د مکعب تر ټولو لوی حجم پیدا کړئ.

**حل**: که د مکعب مستطیل د قاعدې ضلعې ته x او جګوالي ته یې $y$ وویل شي، نو:

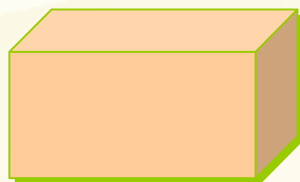
$$x + x + y = 24 \Rightarrow y = 24 - 2x$$

څرنګه چې $y \geq 0$ دی، نو $0 \leq x \leq 12$ کېږي او د مکعب مستطیل حجم عبارت دي له:

$$V = x^2 \cdot y \Rightarrow V = x^2(24 - 2x) = 24x^2 - 2x^3$$

$$V = 24x^2 - 2x^3$$
$$V'(x) = 48x - 6x^2$$
$$V'(x) = 0$$
$$48x - 6x^2 = 0$$
$$x(48 - 6x) = 0$$
$$x_1 = 0$$
$$48 - 6x = 0$$
$$-6x = -48$$
$$x = 8$$

$$V(0) = 24 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0^3 = 0 - 0 = 0$$
$$V'(0) = 0$$
$$V(8) = 24 \cdot (8)^2 - 2 \cdot (8)^3 = 1536 - 1024 = 512$$
$$V(8) = 512$$
$$V(12) = 24 \cdot (12)^2 - 2 \cdot (12)^3 = 3456 - 3456 = 0$$
$$V(12) = 0$$



نو د مکعب مستطیل تر ټولو لوی حجم $512cm^3$ دی.



## پوښتنې

1- د $y = x^3 + x^2 + x + 1$ د تابع تحولات پیدا او منحني یې رسم کړئ.

2- که د اوسپنې له یوې تختې څخه چې هره ضلع یې $1m$ طول لري یو سر خلاص بکس جوړېږي. د هغه له څلورو کنجونو څخه څلور مساوي مربع ګانې پرې کړئ او بیا هغه قات کړئ کوچنی مربع ګانې په کومه اندازه پرې شي چې نوموړی بکس ممکن اعظمي حجم ولري.

3- د $y = x^2$ ګراف ته ډېره نژدې نقطه له $A(3,0)$ نقطې سره پیدا کړئ.

## د ښېرکي مهم ټکي

- د $f(x)$ یوه تابع هغه وخت متزایده بلل کېږي چې د $[a,b]$ پـه انټروال کـې متمـادی او پـه $(a,b)$ خلاص انټروال کې د مشتق وړ او $f'(x) > 0$.
- د $f(x)$ یوه تابع هغه وخت متناقصه بلل کېږي چې د $[a,b]$ پـه انټروال کـې متمـادي او پـه $(a,b)$ خلاص انټروال کې د مشتق وړ او $f'(x) < 0$.
- د تابع له تزاید څخه مطلب دا دی چې د $x$ د متحول په زیاتېدو سره د تـابع قیمـت زیـات او د تـابع لـه تناقص څخه مطلب دا دی چې د $x$ متحول په زیاتېدو سره د تابع قیمت کم شي.
- په یوه تابع کې تر ټولـو لـوړې نقطـې تـه مطلـق اعظمـي(Absolute Maximum) او تـر ټولـو ټیټـې نقطې ته مطلق اصغري(Absolute Minimum) وایي، د $x$ هغه قیمتونه چې د هغوی لپاره تابع یا اعظمي او یا اصغري قیمتونه اخلي د Extreme په نامه یادېږي.
- مطلق Maximum: د $(x_0, f(x_0))$ نقطه مطلقه اعظمي بلل کېږي، کـه چېـرې د $f(x)$ د تعریـف په ساحه کې د هر $x$ لپاره $f(x) \le f(x_0)$ وي، نو $f(x_0)$ ته مطلقه اعظمي وایي.
- مطلق Minimum: د $(x_0, f(x_0))$ نقطه مطلقه اصغري بلل کېږي، کـه چېـرې $f(x)$ د تعریـف پـه ساحه کې د هر $x$ لپاره $f(x) \ge f(x_0)$ وي، نو $f(x_0)$ ته مطلقه اصغري وایي.
- د $y = f(x)$ د تابع منحني په یوه انټروال کې محـدب بلـل کېـږي، کـه چېـرې پـه دې انـټروال کـې پـه منحني مماس رسم شي، نو مماس د منحني پورته خواته پروت وي او د تابع دویم مشتق منفي په لاس راځي.
- د $y = f(x)$ د تابع منحني په یوه انټروال کې مقعر بلل کېږي، که چېرې پـه نومـوړي انـټروال کـې پـه منحني مماس رسم شي، نو مماس د منحني ښـکته خـوا پـروت وي، او د تـابع دویـم مـشتق مثبـت پـه لاس راځي.
- هغـه ټکـی چـې د تـابع لـه مقعریـت څخـه محـدبیت تـه او یـا بـرعکس خپـل لـوری بـدلوي، د انعطاف(Inflection) ټکی بلل کېږي.
- هغه تابع ګانې چې د $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ بڼه ولري، د هوموګرافیک تابع ګانو په نامـه یـادېږي، پـه دې شـرط چې $c \neq 0$ وي.

- که چېرې د $f(x)$ تابع د $a \le x \le b$ په انټروال کې متمادي او د $a < x < b$ په انټروال کې د مشتق وړ او $f(a) = f(b)$ وي، نو لږ ترلږه د $x_0$ یو ټکی په $a < x0 < b$ په انټروال کې شته چې $f'(x_0) = 0$ دی، دا قضیه د رول د قضیې په نامه یادېږي.
- که چېرې $f(x)$ په $[a,b]$ فاصله کې متمادي او د $(a,b)$ په خلاصه فاصله کې د مشتق وړ وي د $x_0$ یو عدد د $a$ او $b$ ترمنځ شته چې $f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ دی دا د متوسط قیمت قضیه بلل کېږي.

**د هوپیتال قاعده:**

که د $f(x)$ او $g(x)$ تابع ګانې د $(a,b)$ په انټروال کې تعریف او د مشتق وړ وي.

که چېرې $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ د لیمیټ نسبت کله چې $x \to a$ د $\dfrac{0}{0}$ مبهم شکل او په هغه صورت کې چې $x \to \infty$ کې د $\dfrac{\infty}{\infty}$ شکل ونیسي په دې حالت کې د تابع د لیمیټ د پیداکولو لپاره د $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ لیمیت پیداکوو او په هغه کې قیمتونه وضع کوو که بیاهم د تابع شکل مبهم وي، مشتق نیولو ته دوام ورکوو ... تر څو د ابهام شکل ختم شي.

## د دریم څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب په نښه کړئ:

1 – که یوه تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادی او د مشتق وړ وي، نو هغه وخت متزاید ده چې :

$a)\ f'(x)=0$ $b)\ f'(x)<0$ $c)\ f'(x)>0$ $d)\ f'(x)\geq 0$

2- په یوه تابع کې تر ټولو لوړې نقطې ته:

$a)$ Absolute Minimum وايي $b)$ Infliction وايي $c)$ Absolute Maximum وايي $d)$ هېڅ یو

3- د $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x}$ په تابع کې د Extreme ټکې عبارت دی له:

$a)$ دوه ټکي $b)$ یو ټکی $c)$ درې ټکي $d)$ نه لري

4 – هغه ټکی چې تابع له مقعریت څخه محدبیت ته بدلوي:

$a)$ د اعظمی ټکی دی $b)$ دانعطاف ټکی دی $c)$ اصغري ټکی دی $d)$ هېڅ یو

5- د $f(x)=ax^2+bx+c$ د تابع د تعریف ساحه عبارت له :

$a)\ (-\infty\ ,+\infty)$ $b)\ (-\infty\ ,0)$ $c)\ (\ 0,-\infty)$ $d)$ هېڅ یو

6- د $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$ تابع عمودي مجانب عبارت دی له:

$a)\ x=1$ $b)\ x=2$ $c)\ x=-1$ $d)\ x=-2$

7- د هوموګرافیک تابع عمودي مجانب عبارت دی له:

$a)\ y=\dfrac{a}{c}$ $b)\ x=-\dfrac{d}{c}$ $c)\ y=\dfrac{c}{a}$ $d)\ y=-\dfrac{c}{d}$

8- د $g(x)=\dfrac{4x^2-6x}{x^2-4}$ تابع افقي مجانب عبارت دی له:

$a)\ 4$ $b)\ 6$ $c)\ -6$ $d)\ -4$

9- لاندې کومه الجبري اړیکه حقیقت لري:

$a)\ \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ $b)\ \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f'(x)$ $c)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ $d)$ هېڅ یو

لاندې پوښتنې ځواب کړئ:

1. د $f(x)=x^2-x$ د تابع د منحني میل د $P(3,0)$ په ټکي کې پیدا کړئ.

2. د $f(x)=-x^2$ په تابع کې د $[3,4]$ په انټروال کې د منحني د بدلون ټکي پیدا کړئ.

3. د نیوټن د خارج قسمت په مرسته د لاندنیو تابع گانو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x)=2x$ 2) $f(x)=3x^2-1$ 3) $f(x)=\sqrt{2}x$

4. د لاندنیو تابع گانو په ورکړل شوو نقطو کې مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x)=2x-1$ , $x_0=-1$ 2) $f(x)=x^2$ , $x_0=2$

5. د لاندې تابع گانو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x)=2x-4x^2$ 2) $f(x)=3x^3-1$

6. په ورکړل شوو ټکو کې د تابع گانو مشتق محاسبه کړئ.

1) $f(x)=7x^2-3x$ , $x_0=-1$

2) $f(x)=6x^2-2x-1$ , $x_0=\dfrac{1}{2}$

7. د $f(x)=3x^5-4x^2-3x$ د تابع څلور ځلې مشتق ونیسئ او د هغې گراف رسم کړئ.

8. د لاندې تابع گانو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x)=x^3\sec x$ 2) $f(x)=\sin(3x-1)$ 3) $f(x)=\cos^2 2x$

9. کوم مثبت عدد دی چې د خپل معکوس سره جمع شي د جمعې حاصل یې تر ټولو کوچنی شي؟

10. د $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$ تابع گراف رسم کړئ.

11. د $f(x)=\dfrac{4x^2}{x^2+1}$ تابع گراف رسم کړئ.

12. د $f(x)=\sin x$ مثلثاتي تابع گراف رسم کړئ.

13. د $f(x)=\tan x$ مثلثاتي تابع گراف رسم کړئ.

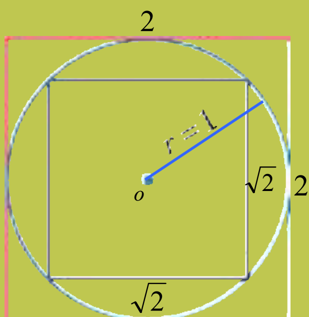
# څلورم څپرکی

# انتیګرال



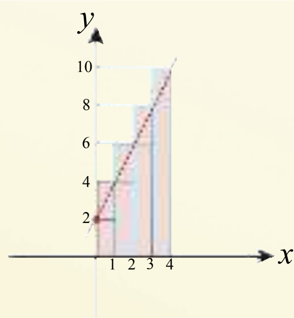
## د ريمان مجموعه

## *Riemann's Sum*




په مخامخ شکل کې چې که د دايرې شعاع يو واحد ده، د دايرې د محيطي او محاطي څلور ضلعي ګانو مساحت حساب کړئ او وواياست چې ددې دايرې مساحت له مخامخ څلور ضلعي ګانو له مساحت سره څه اړيکه لري؟




- هغه مساحت چې د $x$ د محور او $f(x)=2x+2$ د تابع د ګراف په منځ کې د$[0,4]$ په انټروال کې محصور شوی دی، خط خط کړئ.
- د $y=2x+2$ تابع په ګراف کې د څلورو لاندېنيو او پورتنيو مستطيلونو مساحتونه چې په شکل کې ښودل شوی دی، پيدا کړئ.

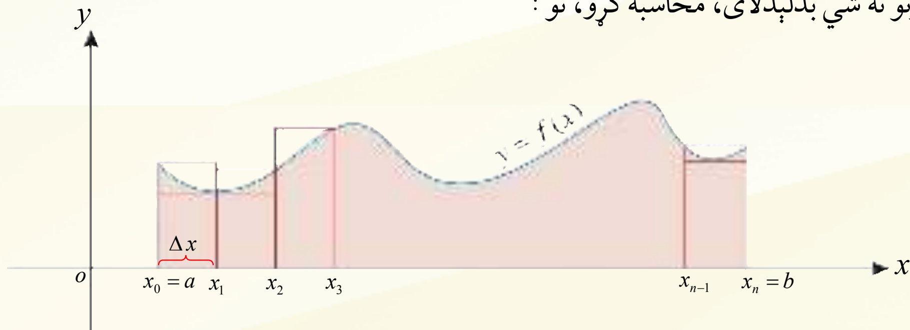
- د پورتنيو مستطيلونو د مساحت مجموعه او د لاندېنيو مستطيلونو د مساحت مجموعه د تابع د ګراف د لاندېنې مساحت سره په ورکړ شوي واټن کې څه اړيکه لري؟
- د پورته په څېر فعاليت د اتو مساوي لاندېنيو مستطيلونو او د اتو مساوي پورتنيو مستطيلونو لپاره تکرار کړئ او پايله يې د ګراف د لاندې مساحت سره په نوموړي واټن کې پرتله کړئ.
- که چېرې د پورتنيو مستطيلونو د مساحتونو مجموعه او لاندېنيو مستطيلونو[1] د جوړولو لپاره د تابع په ګراف کې د فاصلې وېش زيات کړو د پورتنيو او لاندېنيو مستطيلونو د مساحتونو مجموعه کوم قيمت ته نژدې کېږي.

---

[1]- که چېرې د $x$ په محور د فاصلو تقسيمات زيات کړو او يا که چېرې په يوه فاصله کې د مستطيلونو شمېر زيات شي، په هم هغه اندازه د ګراف لاندې مساحت د قيق په لاس راځي.

له پورتني فعاليت څخه لاندې تعريف لاسته راځي:

**تعريف**: فرضوو چې د $y=f(x)$ تابع د $[a,b]$ په تړلي انټروال کې متمادي او تعريف شوې وي که چېرې د ناحيې مساحت چې د $x$ د محور او $y=f(x)$ د تابع د ګراف ترمنځ واقع دی چې په هندسي شکلونو نه شي بدلېدلای، محاسبه کړو، نو :




د $[a,b]$ تړلي انټروال په $n$ مستطيلو نو وېشو، څرنګه چې د هر مستطيل عرض د $(\Delta x=\dfrac{b-a}{n})$ رابطې څخه په لاس راځي او د مستطيلونو طول عبارت دی تابع قيمت په هماغه نقطه کې دی.

او د مستطيلونو د هر انټروال اوږدوالی د $i=1,2,3,\ \dots\ ,n$ لپاره په لاندې ډول دی:

$$x_0=a\,,x_1=a+\Delta x,x_2=a+2\Delta x\dots,x_i=a+i\Delta x,\ \dots\ ,x_n=b$$

$$[x_0,x_1]\ ,\ [x_1,x_2]\ ,\ [x_2,x_3],\ \dots\ ,[x_{i-1},x_i],\ \dots\ ,[x_{n-1},x_n]$$

که په شکل کې د لاندېنيو مستطيلونو مساحت په $f(x_{i-1})\Delta x$ او د پورتنيو مستطيلونو مساحت په $f(x_i)\Delta x$ وښودل شي، نو لرو چې:

$$\text{د لاندينيو مستطيلونو د مساحتونو مجموعه}=f(x_0)\Delta x+f(x_1)\Delta x+\ \dots\ +f(x_{n-1})\Delta x=\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$$

$$\text{د پورتنيو مستطيلونو د مساحتونو مجموعه}=f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+\ \dots\ +f(x_n)\Delta x=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

که چېرې محصور شوی مساحت په $A$ وښيو، نو : $\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x<A<\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

که چېرې د رابطې له اطراف څخه لېميټ ونيسو، نو لرو چې:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x\le\lim_{n\to\infty} A\le\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

د ساندوېچ د قضيې پر بنسټ ليکلای شو چې: $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = A = \lim_{n\to\infty} 2\overset{n}{f}(xi-1)\Delta x$ $_{121}$

نو $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ تـه د ريمـان مجمـوع او ددې مجمـوعې لېميـټ يعنـې $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ تـه د ريمـان د مجموعې لېميټ وايي.

**لومړی مثال**: د $[0,2]$ انټروال په څلور مساوي برخو ووېشئ، د $y = x^2 + 1$ منحني او $x$ محور تر منځ مساحت پيدا کړئ.

**حل**: که چېرې $[0,2]$ انټروال پـه څلـورو مـساوي برخـو ووېـشو، نـو د مـستطيلونو عـرض داسـې پـه لاس راځي:
$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$$

ددې مستطيلونو دهر انټروال اوږدوالی عبارت دي له:

$$x_0 = a = 0 \quad , \quad x_1 = a + \Delta x = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = a + 2\Delta x = 1 \quad , \quad x_3 = a + 3\Delta x = \frac{3}{2}$$

$$x_4 = 2$$

$$[x_0, x_1] \ , \ [x_1, x_2] \ , \ [x_2, x_3] \ , [x_3, x_4]$$

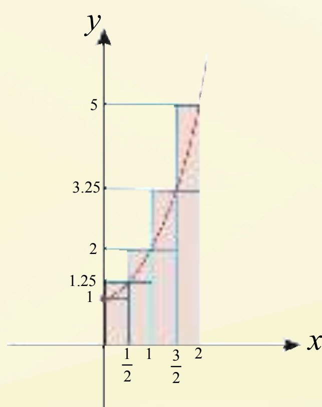
$$[0, \frac{1}{2}] \quad , [\frac{1}{2}, 1] \quad , [1, \frac{3}{2}] \quad , [\frac{3}{2}, 2]$$

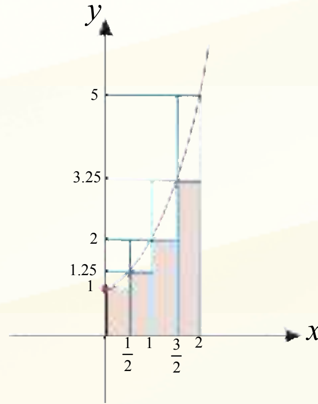
په لاس راغلي قيمتونه د x په ځای په تابع کې وضع کوو.

$$f(x) = x^2 + 1 \ , f(0) = 1$$

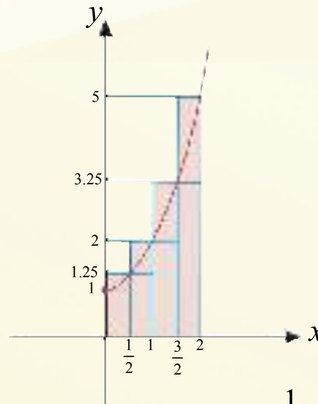
$$f(\frac{1}{2}) = 1.25 \ , \ f(1) = 2$$

$$f(\frac{3}{2}) = 3.25 \ , \ f(2) = 5$$






د لاندېنيو مستطيلونو د مساحتونو مجموعه $= 1\times\frac{1}{2}+1.25\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}+3.25\times\frac{1}{2}=3.75$




د پورتنيو مستطيلونو د مساحتونو مجموعه $= 1.25\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}+3.25\times\frac{1}{2}+5\times\frac{1}{2}=5.75$

$$3.75 < A < 5.75$$

**دويم مثال**: د $f(x)=1+x$ تابع د ريمان د مجموعې لېميټ په [1 ,10] انټروال کې پيدا کړئ.

**حل**:

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{10-1}{n}=\frac{9}{n}$$

$$x_i=a+\Delta xi\ =1+[\frac{9}{n}]\ i\quad ,\quad i=0,1,2,\ \ldots$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x=\lim_{n\to\infty}[\sum_{i=1}^{n}(1+x_i)\Delta x]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[\Delta x\sum_{i=1}^{n}(1+x_i)]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[\Delta x\sum_{i=1}^{n}1+\Delta x\sum_{i=1}^{n}x_i]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}1+\Delta x\sum_{i=1}^{n}(a+\Delta xi)]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}1+\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}(1+\frac{9}{n}i)]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}1+\frac{9}{n}(\sum_{i=1}^{n}1+\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}i)]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[\frac{9}{n}\cdot n+\frac{9}{n}(n+\frac{9}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2})]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[9+\frac{9}{n}(n+\frac{9n^2+9n}{2n})]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[9+\frac{9}{n}(\frac{2n^2+9n^2+9n}{2n})]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[9+\frac{9}{n}(\frac{11n^2+9n}{2n})]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[9+\frac{99n^2+81n}{2n^2}]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[9+\frac{99n^2}{2n^2}+\frac{81n}{2n^2}]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[9+\frac{99}{2}+\frac{81}{2n}]$$

$$=9+\frac{99}{2}=58.5$$

**باید په یاد ولرو:**

$$\sum_{i=1}^{n}c=cn$$

$$\sum_{i=1}^{n}i=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

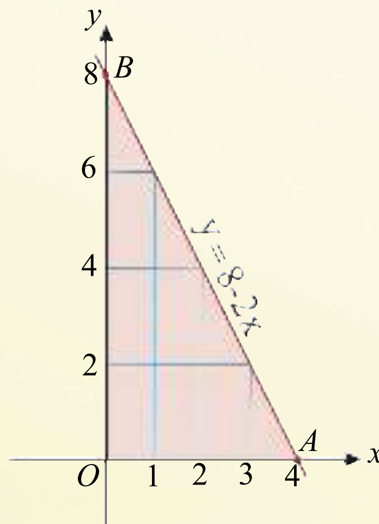
## پوښتنې

1. د $[0,3]$ انټروال په بشپړو مساوي برخو له وېشلو څخه وروسته د $y = 3x$ مستقیم خط او د $x$ د محور تر منځ مساحت محاسبه کړئ.

2. د $\Delta x = 0.5$ قیمت لپاره او د لاندې جدول د قیمتونو په پام کې نیولو سره ګراف رسم، د لاندېنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه اود پورتنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه پیدا کړئ.

| x | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 14 | 20 | 26 | 32 | 38 | 44 | 50 |

3. د $y = 8 - 2x$ تابع ګراف د لاندې $OAB$ مثلث مساحت د $[0,4]$ په انټروال کې د ریمان د مجموعې د لیمیټ څخه په ګټه اخیستنې سره پیدا کړئ.



## د انتیگرال مفهوم

## *Concept of Integral*



څرنګه چې پوهېږئ د شکلونو لاندېني او پورتني مساحتونه د انتیګرال په واسطه محاسبه کېږي.

آیا کولای شو چې د مخامخ شکل پورتنی مساحت په لاس راوړو.

د هغې تابع انتیګرال چې مشتق یې معین وي او یا په بل عبارت د ریمان مجموعي لېمیټ ته انتیګرال وایي دا( $\int$ ) د انتیګرال علامه ده، د $sum$ د کلیمې یا د ریمان د مجموعې د $S$ توري غزېدلی حالت دی، لکه: $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int f(x)dx$ چې دلته $f(x)$ تابع او $dx$ د $f(x)$ تابع د انتیګرال متحول نظر $x$ ته دی.

انتیګرالونه عموماً په دوه ډوله دي. معین او غیر معین انتیګرالونه، هغه انتیګرالونه چې په ترتیب سره یې تر څېړنې لاندې نیسو:

### I- غیرمعین انتیګرال *Indefinite Integral*




- که د $F(x) = 2x^2 - 1$ تابع وي له دې تابع څخه مشتق ونیسئ.
- ددې تابع له مشتق څخه انتیګرال ونیسئ.
- په لاس راغلی انتیګرال له لومړنی تابع سره پرتله کړئ او ووایئ چې( $-1$ ) په نوموړي تابع کې د څه په نامه یادېږي.
- که په پورتني تابع کې ( $-1$ ) په $C$ ونوموو د $f(x)$ تابع له څه سره مساوي ده؟
- پورتنی فعالیت د $F(x) = x^6 + 1$ تابع لپاره تکرار کړئ او ووایئ چې $f(x)$ له څه سره مساوي ده.

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف په لاس راځي:

**تعریف**: که چېرې د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په ترلې انټروال کې تعریف او $F(x)$ د $f(x)$ یوه لومړنی تابع وي. د $F(x)+C$ تابع ګانو سېټ په داسې حال کې چې $C$ یو ثابت عدد وي د $f(x)$ تابع غیرمعین انتیګرال په نامه یادېږي او داسې لیکل کېږي:

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

**لومړی مثال**: $\int x\,dx$ پیدا کړئ.

**حل**: $\int x\ dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{x^2}{2} + C$

**دویم مثال**: $\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}}\ dx$ حساب کړئ.

**حل**: $\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}}\ dx = \int x^{-\frac{3}{7}}\ dx = \frac{x^{-\frac{3}{7}+1}}{-\frac{3}{7}+1} + C = \frac{x^{\frac{4}{7}}}{\frac{4}{7}} + C = \frac{7}{4}\sqrt[7]{x^4} + C$

**دریم مثال** : $\int x^{\frac{3}{2}}\ dx$ پیدا کړئ.

**حل**: $\int x^{\frac{3}{2}}\ dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$



## پوښتنې

لاندې انتیګرالونه محاسبه کړئ:

$a)\ \int \sqrt[5]{x^3}\ dx$

$b)\ \int \frac{1}{x^4}\ dx$

$c)\ \int \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx$

$d)\ \int \frac{x^2\ dx}{\sqrt[4]{x^2}}$

$e)\ \int \sqrt[8]{x^4}\cdot x\ dx$

## د غیرمعین انتیګرال خواص

***Properties of indefinite integral***

تاسې د لېمیټ او مشتق خواص مخکې مطالعه کړي؟ آیا کیدای شي چې ورته خواص په غیـر معین انتیګـرال کې هم وي؟

$$\left.\begin{array}{l}\int k\ dx \\ \int [f(x) \pm g(x)]\ dx \\ \int [f(x) \cdot g(x)]\ dx \\ \int \frac{f(x)}{g(x)} dx \quad , g(x) \neq 0\end{array}\right\} = ?$$




د مشتقاتو له خواصو څخه په کار اخیستنې د لاندې تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

$$f(x) = 3x^4$$

$$f(x) = 2x^3 - \frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = \sin x + \cos x$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې په لاس راوړو:

څرنګه چې د تابع ګانو د مشتق د پیداکولو لپاره له ځانګړو قوانینو څخه ګټه اخېستل کېږي، غیـرمعین انتیګرالونـه هم د داسې خواصو لرونکي دي چې هغه پرته له ثبوت څخه قبلوو:

1- که $k$ یو ثابت عدد وي، نو لرو چې: $\int kdx = k \int dx = kx + C$

**مثال:** د $\int 5dx$ انتګرال پیدا کړئ.

**حل** : $\int 5dx = 5 \int dx = 5x + C$

2- که چېرې $n \neq -1$ وي، نو : $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

**مثال**: د $\int x^4 dx$ **انتیګرال** پیدا کړئ.

**حل**: $$\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + C = \frac{1}{5}x^5 + C$$

3- که چېرې $a$ یو ثابت عدد او $f(x)$ تابع وي، **نو**:

$$\int a\, f(x)\, dx = a\int f(x)\, dx$$

**مثال**: د $\int 2x^2\, dx$ **انتیګرال** محاسبه کړئ.

**حل**: $$\int 2x^2 dx = 2\int x^2 dx = 2\frac{x^3}{3} + C = \frac{2}{3}x^3 + C$$

4- که چېرې $f(x)$ او $g(x)$ دوې تابع ګانې وي په دې صورت کې د تابع ګانو د جمع او تفریق د حاصل انتیګرال مساوي دی په:

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

**مثالونه**:

$$a)\quad \int (2x^2 + 3)dx = \int 2x^2 dx + \int 3dx = \frac{2x^3}{3} + 3x + C$$

$$b)\quad \int (8 - 2x)dx = 8\int dx - 2\int xdx = 8x - x^2 + C$$

5- که چېرې د تابع ګانو ترادف تر انتیګرال لاندې وي، په دی صورت کې د دوی انتیګرال مساوي دی په:

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \ldots + \int f_n(x)dx$$

**مثال**:

$$\int [x^3 - 6x^2 + 9x + 1]dx = \int x^3 dx - \int 6x^2 dx + \int 9xdx + \int dx$$
$$= \frac{x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{9x^2}{2} + x + C$$

6- که $f(x)$ او $g(x)$ دوې تابع ګانې وي، په دې حالت کې د تابع ګانو د ضرب د حاصل انتیګرال، مساوي نه دی د انتیګرالونو د ضرب له حاصل سره په جلا توګه، یعنې:

$$\int[f(x)\cdot g(x)]dx \neq \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$$

**مثال**: که چېرې $f(x)=x+1$ او $g(x)=x-2$ وي، نو:

**حل الف**: لومړی په تابع ګانو د ضرب عملیه تطبیق کوو او وروسته یې انتیګرال په لاس راوړو:

$$\int[f(x)\cdot g(x)]\,dx = \int[(x+1)(x-2)]dx = \int(x^2-2x+x-2)\,dx$$

$$=\int(x^2-x-2)\,dx$$

$$=\int x^2dx-\int x\,dx-\int 2\,dx$$

$$=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+C$$

**حل ب**:اوس د هرې تابع انتیګرال بېلا بېل محاسبه کوو او وروسته یې سره ضربوو په لاس راغلي قیمتونه سره پرتله کوو.

$$\int f(x)\,dx\cdot\int g(x)\,dx = \int(x+1)\,dx\cdot\int(x-2)\,dx = (\int x\,dx+\int dx)(=\int x\,dx-\int 2\,dx)$$

$$=(\frac{x^2}{2}+x+C)(\frac{x^2}{2}-2x+C)=(\frac{x^2}{2}+x)(\frac{x^2}{2}-2x)+C$$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+C \neq (\frac{x^2}{2}+x)(\frac{x^2}{2}-2x)+C$$

په پایله کې څرګنده شوه چې نوموړی مساوات حقیقت نه لري.

7- که چېرې $f(x)$ او $g(x)$ دوه تابع ګانې وي په دې صورت کې د توابعو د تقسیم د حاصل انتیګرال مساوي نه دی. د هرې تابع د انتیګرال له حاصل تقسیم سره، یعنې: $\int\frac{f(x)}{g(x)}dx \neq \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}$

**مثال**: که چېرې $f(x)=x^2+2x$ او $g(x)=x$ وي، نو لرو:

**د الف جزء حل**: لومړی د تابع ګانو د تقسیم د حاصل انتیګرال په لاس راوړو.

$$\int\frac{f(x)}{g(x)}dx=\int\frac{x^2+2x}{x}dx=\int(\frac{x^2}{x}+\frac{2x}{x})dx=\int(x+2)dx=\int xdx+\int 2dx=\frac{1}{2}x^2+2x+C$$

**د ب جزء حل**: اوس د صورت او مخرج د تابع ګانو انټیګرالونه بېلا بېل په لاس راوړو او وروسته یې سره پرتله کوو.

$$\frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}=\frac{\int (x^2+2x)dx}{\int xdx}=\frac{\int x^2dx+\int 2xdx}{\int xdx}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}x^3+x^2}{\frac{1}{2}x^2}+C=\frac{\frac{1}{3}x^3}{\frac{1}{2}x^2}+\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}+C$$

په پایله کې څرګنده شوه چې

$$\int\frac{f(x)}{g(x)}dx\neq\frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}$$



**پوښتني**

د انټیګرال له خاصیتونو څخه په ګټه اخیستنې سره لاندې انټیګرالونه محاسبه کړئ:

$a)\quad \int -17dx=?$

$b)\quad \int\frac{(1+x)^2}{1+x}dx=?$

$c)\quad \int 2x^4dx=?$

$d)\quad \int\frac{1}{x^5}dx=?$

$e)\quad \int(2x^2+4x^3-5x+9)dx=?$

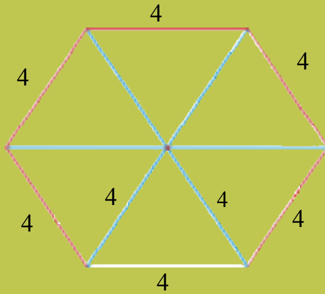
$f)\quad \int(2x+3)^6dx=?$

$g)\quad \int\frac{x^3+2x^2}{x^2}dx=?$

$h)\quad \int(2+x)dx=?$

## معین انتیگرال

### *Definite Integral*




د شپږ ضلعي دننه مثلثونو د مساحتونو مجموعه پیدا او د شپږ ضلعي له مساحت سره یې پرتله کړئ.




- **د $f(x)=2x$ د تابع گراف د $[2,5]$ په انټروال کې د $n=5$ لپاره رسم کړئ او د گراف لاندېنی مساحت پیدا کړئ**
- په شکل کې د گراف لاندېنی مساحت د کومو دوو عددونو ترمنځ پروت دی.

د پورتنی فعالیت پایله داسې بیانوو:

**تعریف**: که چېرې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وی، نو د $f(x)$ تـابع د ریمان مجموعې لېمیټ ته کله چې $n$ بې‌نهایت ته نژدې شی او د فرعي انټروالونو $(\Delta x)$ لوی اوږدوالی صفر ته نژدې شي، د $f(x)$ تابع له $x=a$ څخه تر $x=b$ پورې د معین انتیگرال په نوم یادېږي، یعنې:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x=\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

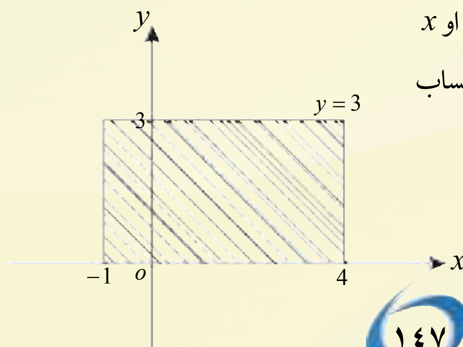
چې $a$ ته د انتیگرال لاندېنی سرحد او $b$ ته د انتیگرال پورتنی سرحد وایي.

**لومړی مثال**: د $\int_1^3 x^2\,dx$ انتیگرال قیمت پیدا کړئ.

**حل**: لومړي د $F(x)$ لومړنی تابع پیدا کوو او بیا د مطلوب انتیگرال قیمت ټاکو:

$$\int_1^3 x^2dx=[\frac{x^3}{3}]_1^3=\frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3}=\frac{27-1}{3}=\frac{26}{3}$$

**دویم مثال**: هغه مساحت چې د $y=3$ خط او $x$ محور ترمنځ په $[-1,4]$ انټروال کې محصور دی حساب کړئ.



**حل**: د $\int_{-1}^{4} 3\ dx$ معین انتیګرال د یوه مستطیل مساحت راښیي چې په تېر شکل کې لیدل کېږي.

ددې مستطیل مساحت د مستطیل د عرض او طول د ضرب له حاصل سره مساوي دی.

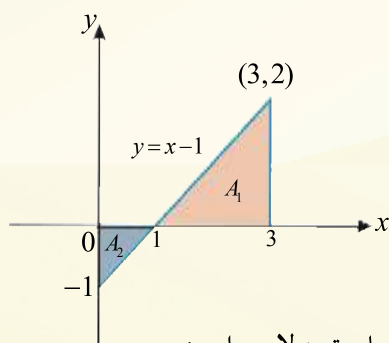
د مستطیل مساحت $= 3[4-(-1)] = 3\cdot 5 = 15$

له انتیګرال څخه په ګټه اخیستنې سره د مستطیل مساحت په لاندې ډول محاسبه کوو.

$$\int_{-1}^{4} 3\ dx = [3x]_{-1}^{4} = 3[4-(-1)] = 15$$

**دریم مثال**: هغه مساحت چې د $y = x-1$ مستقیم خط او $x$ محور ترمنځ په $[0,3]$ انټروال کې محصور دی په لاس راوړئ.

**حل**:




له شکل څخه په ګټه اخیستنې سره لومړی د ښي خوا د لوی مثلث مساحت په لاس راوړو:

$$A_1 = \frac{1}{2}(2\cdot 2) = \frac{1}{2}\cdot 4 = 2$$

د کوچني مثلث مساحت عبارت دی له:

$$A_2 = \frac{1}{2}[1(-1)] = \frac{1}{2}(-1) = -\frac{1}{2}$$

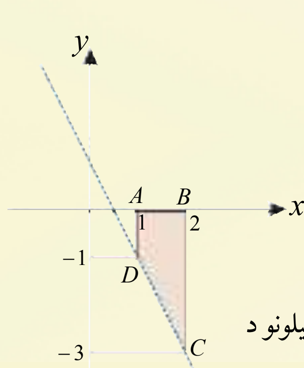
د $A_1$ او $A_2$ د مساحتونو مجموعه عبارت ده له:

$$A_1 + A_2 = 2 - \frac{1}{2} = 1.5$$

په پایله کې د نوموړي انتیګرال قیمت عبارت دی له:

$$\int_{0}^{3} (x-1)\ dx = [\frac{x^2}{2} - x]_0^3 = [\frac{3^2}{2} - 3] - 0 = \frac{9}{2} - 3 = 1.5$$

## پوښتنې




1. د مخامخ شکل څخه په کار اخیستنې سره هغه مساحت چې د $y = -2x+1$ د مستقیم خط او د $x$ د محور ترمنځ په $[1,2]$ انټروال کې محصور دی په لاس راوړئ.
2. د $f(x) = x^2$ تابع د لاندېنیو مستطیلونو د مساحت مجموعه او پورتنیو مستطیلونو د مساحت مجموعه په $[0,1]$ انټروال کې د $n = 4$ لپاره په لاس راوړئ.

## د معین انتیګرال خواص

***Properties of definite integral***

آیا کولای شو چې د غیرمعین انتیګرال د ځانګړونو څخه

په ګټه اخیستنې سره مخامخ اړیکې پوره کړو.

$$\left.\begin{array}{l}\int\limits_a^b c\,dx \\ \int\limits_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx \\ \int\limits_a^a f(x)\,dx\end{array}\right\} = ?$$




- د $\sum\limits_{k=1}^{4} 3k^2$ مجموعه حساب کړئ.
- د $\int\limits_a^b x\,dx$ د انتیګرال قیمت د $[-1,1]$ په انټروال کې پیدا کړئ.
- د $\int\limits_0^2 (1+3x)\,dx$ انتیګرال محاسبه کړئ.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

د ځینو انتیګرالونو محاسبه د قیمت په وضع کولو سره امکان لري او ځینې یې امکان نه لري، دې ته اړتیا پیدا کیږي، ترڅو معین انتیګرال ثبوت کړو.

1. د ثابتې تابع انتیګرال د $[a,b]$ په انټروال کې یعنې $\int_a^b Cdx$ عبارت دی، له:

$$\int\limits_a^b C\,dx = C\int\limits_a^b dx = C[x]_a^b = C(b-a)$$

**ثبوت**: د $[a,b]$ انټروال په $n$ مساوي برخو، یعنې $\Delta x_i = \dfrac{b-a}{n}$ وېشو او د هر $x_i$ لپاره د $i$ - ام انټروال څخه لرو: $i = 0,1,2,\dots,n$ $\qquad f(x_i)=C$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} C\,\Delta x_i = C(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n) = C(\frac{b-a}{n} + \frac{b-a}{n} + \dots + \frac{b-a}{n})$$

$$= C(b-a)(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}) = C(b-a)\frac{n}{n} = C(b-a) \Rightarrow \int\limits_a^b Cdx = C(b-a)$$

**مثال**: $\int_3^4 dx$ معین انتیگرال حساب کړئ.

**حل**: $\int_3^4 dx = [x]_3^4 = 4-3=1$

2. که د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې انتیگرال منونکی وي او $k$ یو ثابت حقیقي عدد وي، نو لرو چې:

$$\int_a^b k\, f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

**ثبوت**: که چېرې د $[a,b]$ انټروال د $x_i$، $i=1,2,\ldots,n$ په $n$ مساوي برخو ووېشو، نو د ریمان د مجموعې او انتیگرال د تعریف له مخې لیکلای شو:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} k\, f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty} k\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$= k\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = k\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b k\, f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

**مثال**: د $\int_{-2}^{2} 4\,dx$ ټاکلی انتیگرال محاسبه کړئ.

**حل**: $\int_{-2}^{2} 4dx = 4\int_{-2}^{2} dx = 4[x]_{-2}^{2} = 4(2-(-2)) = 4\cdot 4 = 16$

3. که د $F(x)$ تابع یوه لومړنی تابع د $f(x)$ او په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي، نو:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

**ثبوت**:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) = -(-F(b)+F(a))$$

$$= -(F(a)-F(b)) = -\int_b^a f(x)\,dx \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

**مثال**: د $\int_2^3 2x\,dx = -\int_3^2 2x\,dx$ انتیگرال مساوات پیدا کړئ.

**حل**: لومړی د کېڼ لوری انتیګرال او وروسته د ښيي خوا انتیګرال محاسبه کوو:

$$\int_2^3 2x\,dx=[\frac{2x^2}{2}]_2^3=\frac{2(3)^2}{2}-\frac{2(2)^2}{2}=\frac{2(9)}{2}-\frac{2(4)}{2}=\frac{18}{2}-\frac{8}{2}=\frac{18-8}{2}=\frac{10}{2}=5$$

$$\int_3^2 2x\,dx=[\frac{2x^2}{2}]_3^2=\frac{2(2)^2}{2}-\frac{2(3)^2}{2}=\frac{2(4)}{2}-\frac{2(9)}{2}=\frac{8}{2}-\frac{18}{2}=\frac{8-18}{2}=-\frac{10}{2}=-5$$

د لاسته راغلو قیمتونو په پام کې نیولو سره پایله په لاس راځي:

$$\int_2^3 2x\,dx=-\int_3^2 2x\,dx$$

**4-** که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي په هغه صورت کې لرو چې: $\int_a^a f(x)\,dx=0$

**ثبوت**: څرنګه چې $\Delta x=0$ دی، نو:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x=\int_a^a f(x)\,dx=F(a)-F(a)=0$$

$$\Rightarrow \int_a^a f(x)\,dx=0$$

**مثال**: د $\int_3^3 3x^2dx$ انتیګرال محاسبه کړئ.

**حل**: $\int_3^3 3x^2dx=[\frac{3x^3}{3}]_3^3=[x^3]_3^3=[3^3-3^3]=27-27=0$

**5-** که $f(x)$ او $g(x)$ تابع ګانې په $[a\ ,b]$ انټروال کې انتیګرال منونکي وي، نو:

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)\,dx\pm\int_a^b g(x)\ dx$$

**ثبوت**:

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)\pm g(x_i)]\ \Delta x$$

$$=\lim_{n\to\infty}[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x\pm\sum_{i=1}^{n} g(x_i)\Delta x]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x\pm\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} g(x_i)\Delta x=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$$

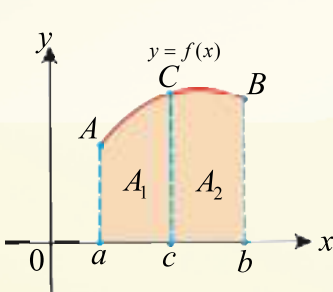
**مثالونه:**

**حل:**

$$a)\ \int_0^1 (4+3x^2)\,dx = \int_0^1 4\,dx + \int_0^1 3x^2\,dx = 4\int_0^1 dx + 3\int_0^1 x^2\,dx = 4[x]_0^1 + 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 4+1=5$$

$$b)\ \int_0^3 (x^2-1)\,dx = \int_0^3 x^2 dx - \int_0^3 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 - [x]_0^3 = \frac{27}{3} - 3 = \frac{27-9}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

6. که چېرې د $f(x)$ تابع د $(a,b)$ په یوه ترلی انټروال کې خرنگه چې $a<c<b$ دی د $a$, $b$ او $c$ ټکی پکی شامل دي انټیګرال منونکي وي، نو: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$




**ثبوت**: دلته د $[a,b]$ انټروال په دوو انټروالونو د $[a,c]$ او $[c,b]$ تقسیموو، وروسته د $f(x)$ تابع انټیګرال په نوموړو انټروالونو کې په پام کې نیسو.

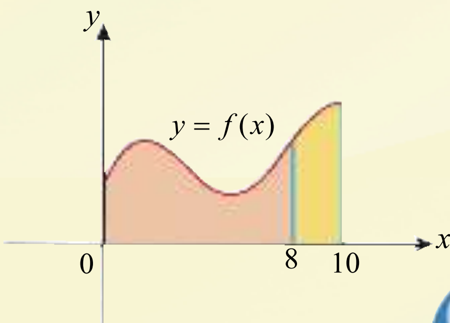
د انټیګرال اصلي مفهوم ته په پام $A=\int_a^b f(x)dx$ په حقیقت کې د هغې سطحې مساحت دی چې د $f(x)$ د تابع د ګراف او $x$ د محور ترمنځ د $[a,b]$ په انټروال کې محصوره ده. په داسې حال کې چې د هغې سطحې مساحتونه چې د $f(x)$ ګراف او د $x$ د محور ترمنځ د $[a,c]$ او $[c,b]$ په انټروالونو کې محصوره ده

او په شکل کې واضح لیدل کېږي عبارت ده له: $A_2=\int_c^b f(x)\,dx$ ، $A_1=\int_a^c f(x)\,dx$

په پایله کې ویلای شو چې: $A=A_1+A_2 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

**مثال**: که چېرې $\int_0^{10} f(x)dx=17$ او $\int_0^8 f(x)dx=12$ وي، نو د $\int_8^{10} f(x)dx$ انټیګرال قیمت محاسبه کړئ.

**حل:**




$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$\int_0^{10} f(x)\,dx = \int_0^8 f(x)\,dx + \int_8^{10} f(x)\,dx$$

اوس د $\int_{8}^{10} f(x)\,dx$ انتیګرال قیمت په لاس راوړو:

$$\int_{8}^{10} f(x)\,dx = \int_{0}^{10} f(x)\,dx - \int_{0}^{8} f(x)\,dx = 17 - 12 = 5$$

7. که چېرې د $f(x) \le g(x)$ تابع ګانې په $[a,b]$ انټروال کې انتیګرال منونکي وي، نو لرو:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx \le \int_{a}^{b} g(x)\,dx$$

**ثبوت:**

$$\int_{a}^{b} g(x)\,dx - \int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} [g(x) - f(x)]\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [g(x) - f(x)]\,\Delta x$$

نو څرنګه $g(x) - f(x) \ge 0$ او $\Delta x \ge 0$ دی، نو د سلسلې هر حد مثبت دی، نو د هغې لېمیټ هم منفي نه دی یعنې:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [g(x_i) - f(x_i)]\,\Delta x \ge 0 \Rightarrow \int_{a}^{b} [g(x) - f(x)]\,dx \ge 0$$

$$\int_{a}^{b} g(x)\,dx - \int_{a}^{b} f(x)\,dx \ge 0 \Rightarrow \int_{a}^{b} g(x)\,dx \ge \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

**مثال:** که چېرې $f(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$ او $g(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$ وي، نو د $x > 1$ لپاره وښیاست چې $\int_{a}^{b} f(x)dx \le \int_{a}^{b} g(x)dx$ دی.

**حل:**

$$\int_{a}^{b} (1 - \frac{x^2}{4})\,dx \le \int_{a}^{b} (1 + \frac{x^2}{2})dx$$

$$\int_{a}^{b} 1\,dx - \int_{a}^{b} \frac{x^2}{4}\,dx \le \int_{a}^{b} 1\,dx + \int_{a}^{b} \frac{x^2}{2}\,dx$$

$$[x]_a^b - \frac{1}{12}[x^3]_a^b \le [x]_a^b + \frac{1}{6}[x^3]_a^b$$

پوهېږو چې $(b-a)>0$ دی، نو:

$$(b-a)-\frac{1}{12}(b^3-a^3)\le(b-a)+\frac{1}{6}(b^3-a^3) \qquad /\div(b-a)$$

$$1-\frac{1}{12}(a^2+ab+b^2)\le 1+\frac{1}{6}(a^2+ab+b^2)$$

$$-\frac{1}{12}\le+\frac{1^{3}}{6} \qquad /\div(a^2+ab+b^2)$$

$$-\frac{1}{12}<\frac{1}{6}$$

8. که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي او $m, M$ قيمتونه په ترتيب سره د تابع مطلق اعظمي او مطلق اصغري قيمتونه په نوموړی انټروال کې وی، نو $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$

**ثبوت**: څرنګه چې $m\le f(x)\le M$ دی، نو لرو چې:

$$\int_a^b m\,dx\le\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b M\,dx$$

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$$

چې دا وروستنی اړیکه د انټیګرال د تخمیني قضيې په نامه يادېږي.

**مثال**: $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ انټیګرال په تخميني توګه حساب کړئ.

**حل**: څرنګه چې د $f(x)=e^{-x^2}$ تابع په $[0,1]$ انټروال کې متمادي ده او $M=f(0)=e^0=1$ مطلق اعظمي او $m=f(1)=e^{-1}$ مطلق اصغري دی، نو لرو چې:

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$$

$$e^{-1}(1-0)\le\int_0^1 e^{-x^2}dx\le 1(1-0)$$

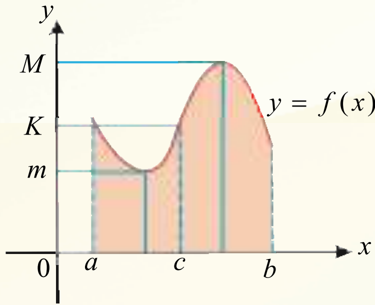
$$e^{-1}\le\int_0^1 e^{-x^2}dx\le 1$$

$$e^{-1}=\frac{1}{e}\approx 0{,}3679\Rightarrow 0.3679\le\int_0^1 e^{-x^2}dx\le 1$$

په پایله کې د انتیګرال تخمیني قیمت د 1 او 0.3679 قیمتونو ترمنځ قرار لري.

9. که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي، نو د $c$ یو حقیقي عدد شته چې: $a \le c \le b$ دی، نو:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$




**ثبوت**: د $a<b$ لپاره $m$ او $M$ قیمتونه په ترتیب د تابع مطلق اصغري او اعظمي قیمتونه د $[a,b]$ په انټروال کې وي، لکه: مخامخ شکل د انتیګرال د تخمیني قضیې څخه په کار اخیستنې د $c\in[a,b]$ لپاره لرو چې:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \quad \Rightarrow m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

فرضوو $K=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ وي، نو $m \le K \le M$ دی او د هر $c$ حقیقي عدد لپاره، $a \le c \le b$

لرو چې: $K=f(c)$ نو: $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) \Leftarrow f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

چې دا وروستی اړیکه د متوسط قیمت د قضیې په نامه یادیږي څرنګه چې $f(c)$ د تابع متوسط قیمت په $[a,b]$ انټروال کې دی.

**مثال**: د $f(x)=x^2$ تابع په $[1,4]$ انټروال کې په پام کې ونیسئ آیا کولای شئ

$$\int_1^4 x^2\,dx = [\frac{x^3}{3}]_1^4 = [\frac{64}{3}-\frac{1}{3}] = [\frac{64-1}{3}] = \frac{63}{3} = 21$$ دی.

**حل**: څرنګه چې $f(x)=x^2$ تابع ده، اوس که د $x$ په ځای د $c$ قیمت په تابع کې وضع کړو نو: $f(c)=c^2$ سره کیږي چې دلته د متوسط قیمت د قضیې د فورمول څخه د $c$ قیمت داسې په لاس راځي:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

اوس په پورتنی رابطه کې یې قیمت ایږدو، لرو چې:

$$\int_1^4 x^2\,dx = c^2(4-1)$$

$$21 = 3c^2 \Rightarrow c^2 = \frac{21}{3} \Rightarrow c^2 = 7 \Rightarrow c = \sqrt{7}$$

$$k = f(c) \quad , \quad f(c) = c^2 = (\sqrt{7})^2 = 7 \Rightarrow f(c) = 7 \quad , \quad k = 7$$

ښکاره شوه چې د تابع یو قیمت مساوي په $k$ او $1 < \sqrt{7} < 4$ دی.

له مخکې شخه پوهېږو چې د مستطیل مساحت د سور او اوږدوالي له ضرب سره برابر دی، نو د متوسط قیمت په فورمول کې $f(c)$ اوږدوالي او $b-a$ سور دی، نو د منحني لاندې مساحت په $[1,4]$ انتروال کې مساوي له هغه مستطیل سره دی چې اضلاع یې 7 او 3 دی.



## پوښتنې

1. لاندې معین انتیگرالونه محاسبه کړئ.

$a)\int_{-1}^{1}(x^3+2)\,dx = ?$

$b)\int_{2}^{5} 7x\,dx = ?$

$c)\int_{-2}^{4}(-x)\,dx = ?$

$d)\int_{-1}^{3}(2|x|-3x)\,dx = ?$

$e)\int_{-2}^{3} 3x\,dx$

$f)\int_{-1}^{2}(x^3-\frac{1}{2}x^4)\,dx = ?$

$g)\int_{-4}^{4}(2x^2-\frac{1}{8}x^4)\,dx = ?$

$h)\int_{1}^{3}\sqrt{x}\,dx$

2. د $\int_{-1}^{4} f(x)\,dx$ انتیگرال قیمت د $[-1,4]$ په انتروال کې داسې پیدا کړئ چې $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 5$ او $\int_{1}^{4} f(x)dx = -2$ وي.

3. د $f(x) = x$ تابع په $[0,2]$ انتروال کې په نظر کې ونیسئ او د $c$ قیمت په لاس راوړئ.

## 10- د انتيګرال او مشتق اساسي قضيې

يو موټر په $72\frac{m}{\sec}$ چټکتيا سره په حرکت کې دی، دريور برک ته فشار ورکوي او موټر له 6 ثانيو وروسته ودرېږي په دې وخت کې وهل شوي فاصله پيدا کړئ.

$$S(t) = v_0 \cdot t$$




- له مشتق د تعريف څخه په ګټې اخيستنې سره د $f(x) = x^2$ د تابع مشتق د $h = 0$ په ټکي کې پيدا کړئ.
- د په لاس راغلی تابع انتيګرال په $[0,1]$ انټروال کې محاسبه کړئ.
- د په لاس راغلو دواړو حالتونو قيمتونه سره پرتله کړئ.

له پورتني فعاليت څخه په لاس راځي چې:

د انتيګرال او مشتق تر منځ يوه منطقي اړيکه شته چې له دې اړيکې څخه په کار اخيستنې سره کولای شو، د انتيګرال اصلي او اساسي قضيې په لاندې ډول ثبوت کړو:

### 1- د انتيګرال او مشتق لومړی اساسي قضيه:

که چېرې د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي او $x$ په دې انټروال کې شامل وي، لرو چې:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

څرنګه چې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې مشتق منونکې ده، نو د هر $x \in [a,b]$ لپاره $F'(x) = f(x)$ دی.

**ثبوت**: څرنګه چې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي ده، نو د هر $x \in [a,b]$ لپاره د $f(x)$ تابع په $[a,x]$ انټروال کې متمادي ده په پايله کې د $f(x)$ تابع په دې انټروال کې انتيګرال منوونکې هم ده.

اوس د $F(x)$ تابع مشتق د تعريف مطابق ليکو او بيا د $x$ متحول ته د $h$ په اندازه تزايد ورکوو، لکه په لاندې ډول:

$$F'(x) = f(x)$$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(a) + F(a) - F(x)}{h}$$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(a) - (F(x) - F(a))}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{F(x)\Big|_a^{x+h} - F(x)\Big|_a^x}{h}$$

اوس د $f(x)$ تابع په $f(t)$ عوض کوو:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(t)\Big|_a^{x+h}-F(t)\Big|_a^{x}}{h}$$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^{x} f(t)\,dt}{h}$$

نظر دريم خاصيت ته لرو چې: $\int_a^b f(t)\,dt=-\int_b^a f(t)\,dt$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^{x} f(t)\,dt}{h}$$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{a} f(t)\,dt+\int_a^{x+h} f(t)\,dt}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h}$$

د متوسط قيمت د قضيې څخه $f(c)=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$ چې $c$ د $x$ او $x+h$ تر منځ واقع دی، نو کله چې $h$ صفر ته تقرب وکړي $c$ ، $x$ ته تقرب کوي، همدارنګه د $f$ تابع له متماديت څخه لرو:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt=\lim_{c\to x} f(c)=f(x)$$

په پايله کې: $F'(x)=f(x)$

**مثال:** د $f(x)=\int_2^{x^2+1}\frac{1}{t^2+1}$ مشتق پيدا کړئ.

**حل:**

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \text{ يا } F(x)=\int_a^{g(x)} f(t)\,dt$$

$$u=g(x)=x^2+1$$

$$f(t)=\frac{1}{t^2+1}$$

د زنځيري قاعدې له مخې لرو:

$$F'(x)=f(g(x))\cdot g'(x)$$

$$F'(x)=\frac{1}{(x^2+1)^2+1}\cdot(x^2+1)'=\frac{1}{(x^2+1)^2+1}\cdot 2x$$

$$F'(x)=\frac{2x}{(x^2+1)^2+1}$$

## 2- د انتيګرال او مشتق دويمه اساسي قضيه:

که چېرې $F(x)$ د $f(x)$ تابع لومړنی تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي، په دې صورت کې لرو چې:

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

**ثبـــوت**: لـه مخکـې قـضيې څخـه پـوهېږو چـې کــه $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ دی لـه دې ځايـه د هر $x \in [a,b]$ لپاره $F'(x) = f(x)$ نو د دې دوو مقدارونو خلاف يو ثابت مقدار شته چې:

$$f(x) - F(x) = k \Rightarrow f(x) = F(x) + k$$

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

$$F'(x) = f(x)$$

$$\int_a^x f(t)dt = f(x) = F(x) + k$$

$$\int_a^x f(t)\ dt - F(x) = k$$

که د $x$ په ځای په پورتنۍ رابطه کې $a$ وضع کړو، نو:

$$\int_a^a f(t)\ dt - F(a) = k \quad , \quad 0 - F(a) = k \quad \Rightarrow \ k = -F(a)$$

که د $k$ قيمت په لومړۍ رابطه کې وضع کړو، نو: $\int_a^x f(t)dt - F(x) = -F(a)$

که د $x$ په ځای په دې رابطه کې $b$ وضع شي، نو: $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

چې اخيـرۍ رابطـه پـه $\int_a^b f(t)\,dt = [F(x)]_a^b$ پـه شـکل ښـودل کيـږي دغــه وروســتۍ اړيکــه د لــومړنۍ تــابع او $\int_a^b f(t)\,dt$ انتيګــــرال تــــرمنځ اړيکــــه ښــــيي چــــې د نيوټن"لايبنز" رابطې په نوم هم يادېږي.

**يادونه:**

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$$

$$\int \cos ec^2 x\,dx = -\cot x + c$$

**مثال**: د $\int_0^1 x^2 dx$ انتیګرال حاصل پیدا کړئ.

**حل**: $$\int_0^1 x^2 dx = F(1) - F(0) = [\frac{x^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 = \frac{1}{3}$$



## پوښتنې

1. لاندې مشتقات پیدا کړئ.

$a)\ F(t) = \int_{\sin t}^{\cos t} \frac{1}{4-x^2} dx$

$b)\ F(t) = \int_0^{\cos t} \frac{1}{4-x^2} dx$

$c)\ F(t) = \int_{-\pi}^{t} \frac{\cos y}{1+y^2} dy$

$d)\ F(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt$

2. که په $t$ $f(t) = t$ تابع کې $F(0) = 2$ وي، د $F(b)$ مقدار په $0, 0.2, 0.4, \ldots, 1$ ټکو کې پیدا کړئ.

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$ پیدا کړئ.

## 11- په تعویضي طریقې سره انتیګرال نیونه

_ آیا کولای شئ چې مخامخ انتیګرال د نامعین انتیګرال له خواصو څخه په کار اخېستنې سره حل کړئ.

_ که نه شي کولای، نو د جذر لاندې افاده په یوه متحول سره عوض کړئ او بیا هغه حساب کړئ او ووایئ چې په انتیګرال کې د وضع کولو دا طریقه په څه نوم یادېږي.

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$$




- د $\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$ انتیګرال کې د جذر لاندې افاده په $u$ سره عوض کړئ.
- د $u$ مشتق ونیسي او د $dx$ قیمت پیدا کړئ.
- څرنګه چې نوموړی انتیګرال یو معین انتیګرال دی، نو د $u = 2x+1$ په معادله کې د $x = 0$ او $x = 4$ قیمتونه وضع او د انتیګرال حدونه د $u$ له جنسه په لاس راوړئ، وروسته د انتیګرال قیمت محاسبه کړئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې ته رسېږو:

که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انتروال کې مشتق منونکې وي، $u = g(x)$ او $F'(x) = f(x)$ سره تعویض شي، څرنګه چې $du = g'(x)dx$ دی، له زنځیري قاعدې څخه لیکلای شو:

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

**لومړی مثال:** د $\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$ انتیګرال قیمت پیدا کړئ.

**حل**: د قوس دننه افاده په $u$ عوض کوو:

$$u=3-5x \;,\quad du=-5\,dx \qquad dx=-\frac{du}{5}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ u=3-5x \;\Rightarrow\; u=3-5\cdot 1=-2 \;\Rightarrow\; u=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ u=3-5x \;\Rightarrow\; u=3-5\cdot 2=3-10 \;\Rightarrow\; u=-7 \end{cases}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}=\int_{-2}^{-7}\frac{1}{u^2}(-\frac{1}{5})\,du=-\frac{1}{5}\int_{-2}^{-7}\frac{du}{u^2}=-\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{u}\right]_{-2}^{-7}=\left[\frac{1}{5u}\right]_{-2}^{-7}=\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{14}$$

**دویم مثال**: د $\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5\,dx$ انتیگرال حساب کړئ.

**حل**: د قوس دننه افاده په $u$ عوض کوو.

$$u=1+2x^3 \quad , \quad du=6x^2\,dx \Rightarrow x^2dx=\frac{1}{6}du$$

$$\begin{cases} x=0 \\ u=1+2x^3 \Rightarrow u=1+2\cdot 0=1 \Rightarrow u=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ u=1+2x^3 \Rightarrow u=1+2\cdot 1=3 \Rightarrow u=3 \end{cases}$$

$$\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5\,dx=\int_1^3 u^5\frac{1}{6}\cdot du=\frac{1}{6}\int_1^3 u^5du=\frac{1}{6}[\frac{u^6}{6}]_1^3=\frac{1}{6}[\frac{3^6}{6}-\frac{1}{6}]$$

$$=\frac{1}{6}[\frac{729}{6}-\frac{1}{6}]=\frac{1}{6}[\frac{728}{6}]$$

$$=\frac{728}{36}=\frac{182}{9}=20.\overline{2}$$




- د $\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$ انتیگرال کې د جذر لاندې افاده د $u$ په متحول سره تعویض کړئ.
- له $u$ څخه مشتق ونیسئ او په لاس راغلی قیمت په لومړنی انتیګرال کې وضع او هغه حساب کړئ.

• له پورته څخه د $F(x)+C$ په لاس راغلي تابع څخه مشتق ونیسئ او له هغې څخه لومړنی تابع په لاس راوړئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

که د $F(u)$ تابع د $f(u)$ لومړنی تابع وي، د $u=g(x)$ د متحول په تعویض سره یوه بله تابع چې مستقل متحول یې $x$ او متمادي مشتق ولري له زنځیري قاعدې څخه په کاراخیستنې سره لرو:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx=\int f(u)\,du$$

**لومړی مثال:** $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$ انتیګرال حساب کړئ.

**حل:** د جذر لاندې افاده په $u$ سره عوض کوو.

$$u=1-4x^2\ ,\ du=-8x\,dx$$

$$xdx=-\frac{1}{8}du$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx=\int \frac{1}{\sqrt{u}}(-\frac{1}{8})\,du=-\frac{1}{8}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du=-\frac{1}{8}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du=-\frac{1}{8}\,(\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1})+C$$

$$=-\frac{1}{8}(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}})+C=-\frac{1}{8}(\frac{\sqrt{u}}{\frac{1}{2}})+C=-\frac{1}{8}(2\sqrt{u})+C=-\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}+C$$

**دویم مثال:** $\int x^3\cos(x^4+2)dx$ حساب کړئ.

**حل:** که چیرې $u=x^4+2$ وضع کړو په لاس راځي:

$$u=x^4+2\ ,\ du=4x^3dx\ ,\ x^3dx=\frac{1}{4}du$$

$$\int x^3\cos(x^4+2)\,dx=\int \cos u\cdot\frac{1}{4}du$$

$$=\frac{1}{4}\int \cos u\,du$$

$$=\frac{1}{4}\sin u+C$$

$$=\frac{1}{4}\sin(x^4+2)+C$$

## پوښتني

لاندې انتيګرالونه د تعويض له لارې محاسبه کړئ.

a) $\int \cos 3x\, dx = ?$

b) $\int_{1}^{2} x\sqrt{x-1}\; dx = ?$

c) $\int_{0}^{7} \sqrt{4+3x}\; dx = ?$

d) $\int 2\sqrt[5]{(1-4x)^2}\, dx = ?$

e) $\int 2x(x^2+3)^4\, dx = ?$

f) $\int_{0}^{5} \frac{x\, dx}{x^2+10} = ?$

g) $\int \sqrt{\cos x}\; \sin x\; dx = ?$

## 12- په قسمي طريقې سره انتيګرال نيونه Integration by Parts



د میتوز د سلول وېش، د مور د هر سلول څخه، وروسته د میتوز د سلولي وېش څخه، دوه نور سلولونه جوړېږي.

د حجروي وېش په وخت کې يوه حجره په دوو يا څو حجرو وېشل کېږي. آيا کولای شئ دا لاره(روش) په نورو شيانو کې، لکه: تېږه، شګه او نورو کې ووينو که ځواب هو وي، نو دا لاره د څه په نامه يادېږي.


فعاليت

- د $\int \frac{xdx}{x^2+1}$ انتيګرال په تعويضي طريقه حل کړئ.
- د $\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}dx$ انتيګرال قيمت په تعويضي طريقه پيدا کړئ.
- آيا کولای شئ چې د $\int x^2 \sin x dx$ انتيګرال په تعويضي طريقه حل کړئ.

له پورتني فعاليت څخه دې پايلې ته رسېږو:

د $\int f(x)g(x)\,dx$ په انتيګرال کې $f(x)$ او $g(x)$ دوي مشتق منونکی تابع ګانې دي چې يوه له بلې سره د ضرب وړ وي يا نه وي، خو د انتيګرال محاسبه يې اسانه کار نه دی، که چېرې $f(x)=u$ او $g(x)=v$ وضع کړو، د ضرب حاصل مشتق يې مساوي په: $(u\cdot v)'=u'\cdot v+v'\cdot u$ دی.

له پورتنې رابطې څخه $v'\cdot u$ په لاس راوړو اوله اطراف څخه انتيګرال نيسو:

$$v'\cdot u=(u\cdot v)'-u'\cdot v$$

$$\int v'\cdot u\ dx=u\cdot v-\int u'\cdot v\ dx \quad \text{يا} \quad \int udv=u\cdot v-\int vdu$$

چې پورتنۍ رابطې ته د غيرمعين انتيګرال فورمول په قسمي طريقه وايي.

که د $u$ او $v$ تابع ګانې په $[a,b]$ انټروال کې تعريف شوې وي، لاندې فورمول د معين انتيګرال فورمول په قسمي لاره(طريقه) بلل کېږي.

$$\int_a^b v'u\,dx=u\cdot v\,\Big|_a^b-\int_a^b vu'\,dx \quad \text{يا} \quad \int_a^b udv=u\cdot v\,\Big|_a^b-\int_a^b vdu$$

**لومړی مثال**: د $\int x\sin x\,dx$ انتیگرال پیدا کړئ.

**حل**:

$$u = x \quad , \quad du = dx$$
$$dv = \sin x\,dx \quad , \quad v = -\cos x$$
$$\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du$$
$$\int x\sin x\,dx = x(-\cos x) - \int -\cos x\,dx$$
$$= -x\cos x + \sin x + C$$

**دویم مثال**: د $\int_0^1 -x\,e^x\,dx$ انتیگرال حساب کړئ.

**حل**:

$$u = -x \quad , \quad du = -dx \quad , \quad -du = dx$$
$$dv = e^x dx \quad , \quad v = e^x$$
$$\int_a^b v'\cdot u\,dx = u\cdot v\,\Big|_a^b - \int_a^b v\cdot u'\,dx$$
$$\int_0^1 -xe^x\,dx = [-xe^x]_0^1 + \int_0^1 e^x dx$$
$$= -e^1 + 0\cdot e^0 + [e^x]_0^1$$
$$= -e^1 + e^1 - e^0 = -e^0$$
$$= -1$$

**یادونه:**

$$\int e^x\,dx = e^x + c$$



**پوښتنې**

لاندې انتیگرالونه حساب کړئ.

a) $\int \theta\cos\theta\,d\theta = ?$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,dx = ?$

c) $\int x^5\cos(x^3)\,dx = ?$

d) $\int_0^1 x\,e^x\,dx = ?$

## د خپرکي مهم ټکي

**د ریمان مجموعه**: فرضوو د $y = f(x)$ تابع پـه $[a,b]$ انټـروال کـې متمـادي او تعریـف شـوی وي او د هغې ناحیې مساحت چې د $x$ محور او د $y = f(x)$ منحني ترمنځ واقع دی چې په هندسي شکلونو نـه شي بدلېدلای، محاسبه کړو.

د $[a,b]$ انټروال په n مستطیلو نو تقسیموو څرنګه چې د هر مـستطیل عـرض د $(\Delta x = \dfrac{b-a}{n})$ رابطې څخه په لاس راځي او د مستطیلونو طول عبارت دی د تابع قیمت په هم هغه ټکي کې، دا فاصلې په لاندې ډول دي:

او د مستطیلونو انټروالونه د $i = 1, 2, 3, \; ........ \; , n$ لپاره په لاندې ډول دي:

$$x_0 = a \quad , \quad x_1 = a + \Delta x \quad , \quad x_2 = a + 2\Delta x, \; \ldots \; , x_i = a + i\Delta x, \; \ldots \; , x_n = b$$
$$[x_0, x_1] \; , \; [x_1, x_2] \; , \; [x_2, x_3], \; \ldots \; , [x_{i-1}, x_i], \; \ldots \; , [x_{n-1}, x_n]$$

که د لاندېنیو مستطیلونو مساحت په $f(x_{i-1})\Delta x$ او د پورتنیو مـستطیلونو مـساحت پـه $f(x_i)\Delta x$ وښـودل شي او د محصور شوي سطحې مساحت په $A$ وښیو، نو لرو چې:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x < A < \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

**نامعین انتیګرالونه**:که چېرې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې تعریف او $F(x)$ د $f(x)$ یـوه لـومړنی تابع وي. د $F(x) + C$ توابعو سټ چې $c$ یو ثابت عـدد وي د غیـرمعین انتګـرال پـه نامـه یـادېږي او داسـې لیکل کېږي: $\int f(x)dx = F(x) + C$

**د نامعین انتیګرالونو خواص(ځانګړتیاوې):**

$$\int k dx = k \int dx = kx + C$$
$$\int a\, f(x)\, dx = a \int f(x)\, dx$$
$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x)\; dx \pm \int g(x)\; dx$$
$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx + \ldots + \int f_n(x) dx$$
$$\int [f(x) \cdot g(x)]\; dx \neq \int f(x)\, dx \cdot \int g(x)\, dx$$
$$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx \neq \frac{\int f(x) dx}{\int g(x) dx} \quad , \; g(x) \neq 0$$

**معین انتیگرال**: د $f(x)$ تابع د ریمان مجموعې لېمیټ ته په $[a,b]$ انټروال کې کله چې $n$ بې‌نهایت ته نژدې شي د $\Delta x$ فرعي انټروالونو اوږدوالی صفر ته نژدې کېږي چې د $f(x)$ تابع معین انتیګرال د $x=a$ څخه تر $x=b$ پورې په نوم یادېږي.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$$

$a$ ته د انتیګرال لاندېنی سرحد او $b$ ته د انتیګرال پورتنی سرحد وايي.

**د معین انتیګرال خواص**(ځانګړتیاوې):

$$\int_a^b C\,dx = C(b-a)$$

$$\int_a^b k\,f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$f(x)\le g(x) \quad \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

$$m(b-a)\le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a) \quad \Rightarrow \quad f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

### د انتیگرال او مشتق لومړی اساسي قضیه:

که چېرې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي او $x$ په دې انټروال کې شامل وي، لرو چې:

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

څرنګه چې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې د مشتق وړ ده، نو د هر $x\in[a,b]$ لپاره $F'(x)=f(x)$ دی.

### د انتیگرال او مشتق دویمه اساسي قضیه:

- که چېرې $F(x)$ تابع د $f(x)$ لومړنی تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي، په دې صورت کې لرو چې:

$$\int_a^b f(t)\,dt=F(b)-F(a)$$

- که $F(u)$ د $f(u)$ لومړنی تابع وي او له $u=g(x)$ متحول سره تعویض شي چې مستقل متحول یې $x$ او متمادي مشتق ولري. له زنځیري قاعدې څخه په کار اخیستنې سره لرو:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx=\int f(u)\,du$$

- که $F(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې مشتق منونکي وي او $u=g(x)$ همدارنګه له $F'(x)=f(x)$ سره تعویض شي، څرنګه چې $du=g'(x)dx$ دی، له زنځیري قاعدې څخه لیکلای شو:

$$\int_a^b f(g(x))\;g'(x)\;dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

- د $\int f(x)g(x)dx$ انتیگرال کې $f(x)$ او $g(x)$ دوې مشتق منونکي تابع ګانې وي چې په خپل منځ کې قابل د ضرب وي او یا نه وي، خو د انتیگرال محاسبه یې آسانه کار نه دی، که چېرې $f(x)=u$ او $g(x)=v$ سره عوض شي، د هغوی د حاصل ضرب مشتق عبارت دی له:

$$(u\cdot v)'=u'\cdot v+v'\cdot u$$

له پورتني اړيکې څخه $v'\cdot u$ په لاس راوړو او له دواړو خواوو څخه انتيګرال نيسو:

$$\int v'\cdot u \, dx = u\cdot v - \int u'\cdot v \, dx \quad \text{يا} \quad \int u dv = u\cdot v - \int v du$$

چې اخيرى اړيکې ته د غير معين انتيګرال فورمول په قسمي طريقه وايي.

- که د $u$ او $v$ تابع ګانې په $[a,b]$ انټروال کې تعريف شوى وي لاندې فورمول، د معين انتيګرال فورمول په قسمي لاره(طريقه) بلل کيږي:

$$\int_a^b v'u \, dx = u\cdot v \Big|_a^b - \int_a^b vu' \, dx \quad \text{يا} \quad \int_a^b u dv = u\cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

## د څپرکي پوښتنې

1- د لاندې معينو انتيګرالونو قيمت پيدا کړئ.

$a)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+x^2}dx$ $b)\ \int_{-4}^{4}[2x^2-\frac{1}{8}x^4]dx$ $c)\ \int_2^4 \frac{1}{x^2}dx$

$d)\ \int_0^3 4dx$ $e)\ \int_1^3 \sqrt{x}\ dx$ $f)\ \int_1^2 (x^2-x^5)dx$

$g)\ \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^2 x}dx$ $h)\ \int_{-2}^{0}[\frac{x^3}{4}+\frac{x^2}{3}]dx$ $i)\ \int_2^3 (x^3+x^2)dx$

$j)\ \int_{-2}^{2}[x^3-\frac{1}{2}x^2+3x-4]dx$ $k)\ \int_0^{\pi} \sin x dx$ $l)\ \int_1^2 x^2\ dx$

2- لاندې غير معين انتګرالونه په لاس راوړئ.

$a)\ \int[\sin x+8x^3]dx$ $b)\ \int[x^5+\frac{4}{x^4}+x^3+\frac{2}{x^2}+x]dx$

$c)\ \int x(1-2x^2)dx$ $d)\ \int \sin x\, dx$

$e)\ \int \frac{\sin 2x}{2\sin x}dx$ $f)\ \int \frac{(1-x)^2}{1-x}dx$

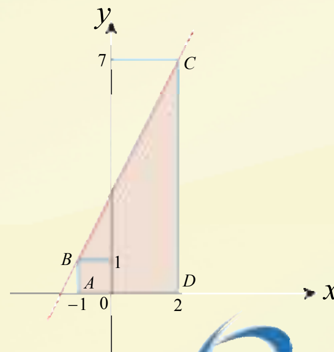
$g)\ \int \sqrt[5]{x^3}\ dx$ $h)\ \int \frac{3x^2+8x}{x}dx$

$i)\ \int(2x^2+3)\ dx$ $j)\ \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+2}}dx$

$k)\ \int \frac{(1+x)(1-x)}{x-x^3}dx$ $l)\ \int(3x^2+4x-1)\ dx$

3- د لاندې محصور رنګ شوې سطحې مساحت د شکل له مخې پيدا کړئ.

$\int_{-1}^{2}(2x+3)dx$



4- لاندې انتیګرالونه د تعویضي طریقې په مرسته پیدا کړئ.

$a)\ \int 3\cos(2x+1)\, dx$

$b)\ \int \sqrt{3x+5}\, dx$

$c)\ \int \frac{2\, dx}{x+2}$

$d)\int (3x+6)^3\, dx$

$e)\int x^3\sqrt{x^4+2}\, dx$

$f)\int (x^3+2)^2 3x^2 dx$

$g)\int_0^2 \frac{dt}{(3-2t)^2}$

$h)\int_0^2 x^2\cdot\sqrt{9-x^3}\ dx$

$i)\int \frac{1}{(x-10)^7}dx$

$j)\int_0^1 (1-x^2)^3 x dx$

$k)\int (4-3x)^7 dx$

$l)\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[4]{x^3+2}}$

5- لاندې انتیګرالونه د قسمي طریقې په مرسته پیدا کړئ.

$a)\ \int x\cos x\, dx$

$b)\int_0^{\pi} \sin x\cos x\, dx$

$c)\ \int e^x\cdot\cos x\, dx$

$d)\int_0^{2\pi} x\cos 3x\, dx$

$e)\ \int xe^{-x}dx$

$f)\int x\sqrt{1+x}\ dx$

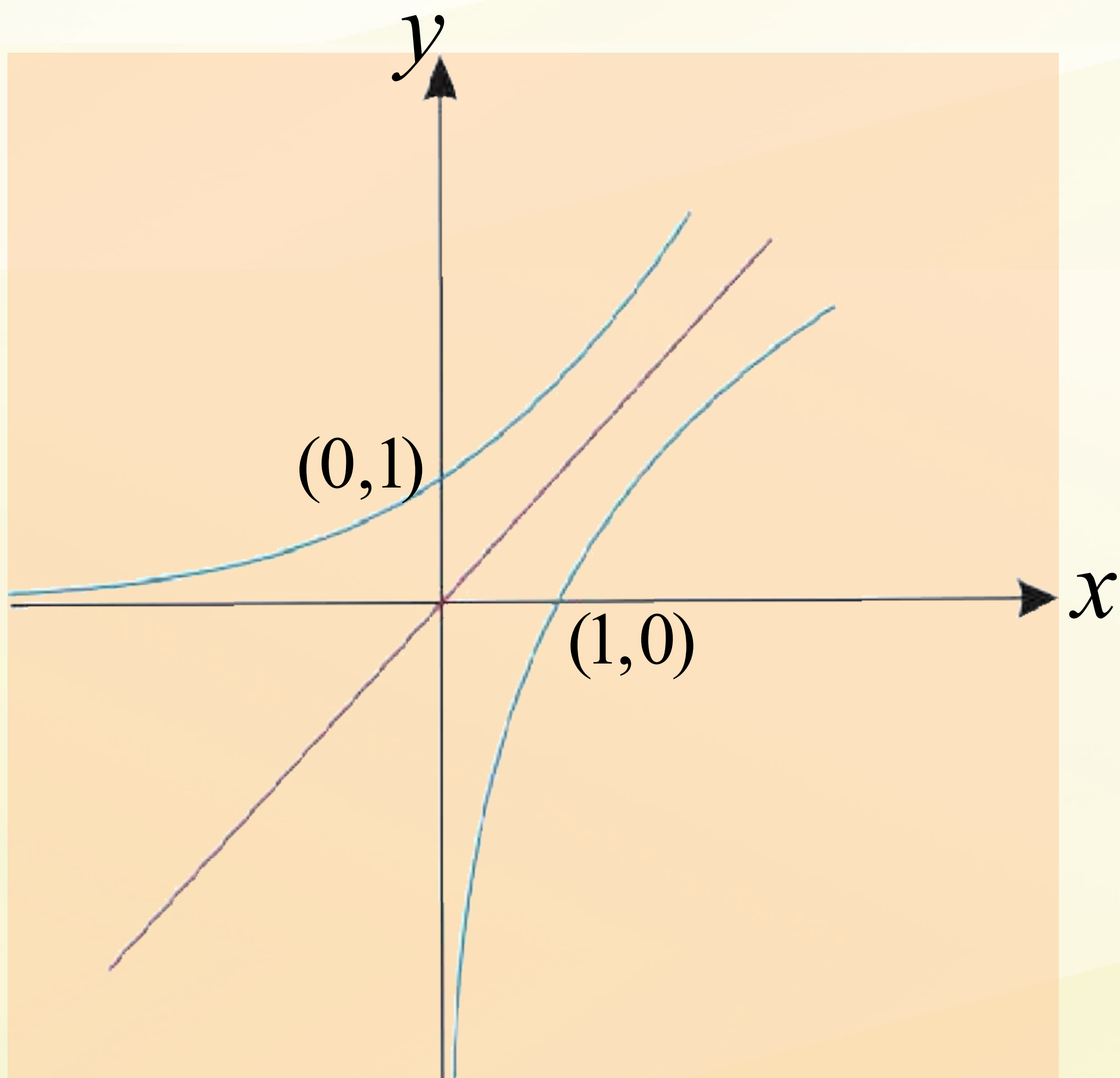
$g)\ \int x^2\cdot e^{2x}dx$

$h)\ \int e^{2x}\sin 3x\, dx$

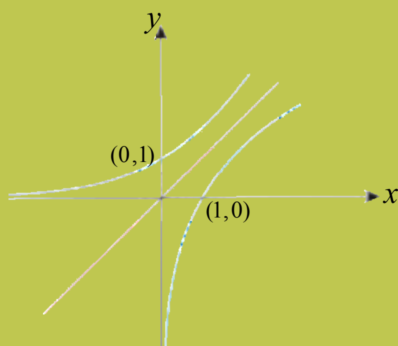
$i)\ \int x^2\cdot e^{-x}\, dx$

# پنځم څپرکی

## د لوګاریتمي او اکسپوننشیل تابع ګانو مشتق او انتیګرال


y
x
(0,1)
(1,0)

## د لوګاریتمي او اکسپوننشیل تابع ګانو مشتق




مخامخ شکل د څه ډول تابع ګانو ګراف راښیي، نومونه یې واخلئ.




- لوګاریتم تعریف او خواص یې ولیکئ.
- لوګاریتمي او اکسپوننشیل تابع ګانې یوه له بلې سره څه اړیکې لري.
- که $\log_b x$ یوه متصله تابع وي، نو $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ له کوم عدد سره مساوي ده.
- د $y = f(x)$ د تابع له دواړو خواوو څخه طبیعي لوګاریتم ونیسئ، اړیکه یې ولیکئ.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

په عمومي ډول که $f(x) = \ln x$ او $g(x) = a^x$ وي؛ نو $g'(x) = a^x \ln a$ او $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ دی.

**ثبوت:**

-1

$$y = g(x) = a^x$$
$$\ln y = \ln a^x = x \ln a$$

د مساوات له دواړو خواوو څخه نظر $x$ ته مشتق نیسو:

$$\frac{y'}{y} = x' \ln a + x(\ln a)'$$
$$\frac{y'}{y} = \ln a + 0$$
$$\frac{1}{y} y' = \ln a$$
$$y' = y \ln a \quad \Rightarrow \quad g'(x) = a^x \ln a$$

-2

$$f(x)=\ln x$$

$$(\ln x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\frac{x+h}{x}}{h}$$

$$(\ln x)'=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln(\frac{x+h}{x})=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln(1+\frac{h}{x})\ =\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{x}{h}\ln(1+\frac{h}{x})$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\ln(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}$$

که $u=\frac{x}{h}$ وضع شي نو $\frac{h}{x}=\frac{1}{u}$ دی خرنګه چې 0 $h\to 0$ تقرب وکړي، نو $u\to\infty$ ته نژدې کېږي، لیکلای شو چې:

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}\lim_{u\to\infty}\ln(1+\frac{1}{u})^{u}\ =\frac{1}{x}\ln\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^{u}$$

پوهېږو چې $\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^{u}=e$ دی، نو: $(\ln x)'=\frac{1}{x}\ln e=\frac{1}{x}$

**قضیه**

1. که د $f(x)=\log_a x$ تابع مشتق منوونکی وي، نو مشتق یې $f'(x)=\frac{1}{x}\log_a e$

2. که $f(x)=\log_a g(x)$ او $g(x)$ مشتق منوونکی وي، نو $(\log_a g(x))'=\frac{g'(x)}{g(x)}\log_a e$

**ثبوت**:

-1

$$f(x)=\log_a x\quad\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}\log_a e$$

$$f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\frac{x+h}{x}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a(1+\frac{h}{x})=\lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\log_a(1+\frac{h}{x})=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\log_a(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}$$

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a\lim_{h\to 0}(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}$$

اوس که $\frac{x}{h}=u$ وضع شي، نو $\frac{h}{x}=\frac{1}{u}$ کېږي، که $h\to 0$ صفر ته تقرب وکړي، نو $u\to\infty$ کوي، یعنې:

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^{u}\ =\frac{1}{x}\log_a e$$

2- غواړو ثبوت کړو چې: $(\log_a g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)}\log_a e$

د زنځیري قاعدې له مخې:

$$f'(x) = (\log_a g(x))' = (\log_a g(x))' \cdot g'(x) = \frac{1}{g(x)}\log_a e \cdot g'(x)$$

$$= \frac{g'(x)}{g(x)}\log_a e$$

که $a = e$ وضع شي، نو لرو: $(\log_a g(x))' = (\ln g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)}$

**پایله**:

1- د Exponential تابع ګانو مشتق د لوګاریتم په مرسته کولای شو په اسانۍ سره په لاس راوړو.

که $y = e^x$ وي ددې تابع مشتق $y' = e^x$ دی، ځکه که د $y = e^x$ رابطې څخه طبیعي لوګاریتم ونیسو، په لاس راځي:

$$y = e^x \quad \Rightarrow \ln y = x \ln e = x$$

$$(\ln y)' = (x)' \quad \Rightarrow \frac{y'}{y} = 1 \quad \Rightarrow y' = y \cdot 1 = e^x$$

2- که $y = e^u$ او $u$ تابع د $x$ وي، نو: $y' = u'e^u$

3- که $y = a^u$ کله چې $a > 0$ او $a \neq 1$ وي، نو: $y' = u'a^u \ln a$

4- د لوګاریتمي تابع ګانو د مشتق پیداکولو لپاره په بېلابېلو قاعدو سره له دې اړیکې څخه ګټه اخلو:

$$y = \log_a u \Rightarrow y' = (\log_a u)' = \frac{u'}{u}\log_a e$$

$$y' = \frac{u'}{u}\log_a e = \frac{u'}{u} \cdot \frac{1}{\log_e a} \quad \Rightarrow y' = \frac{u'}{u \ln a}$$

**لومړی مثال**: د $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ تابع مشتق پیداکړئ.

**حل**: که $g(x) = x^2 + 1$ وضع کړو، نو لرو:

$$g(x) = x^2 + 1$$

$$g'(x) = 2x$$

$$(\ln g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$(\ln(x^2 + 1))' = \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x \quad \Rightarrow f'(x) = (\ln(x^2 + 1))' = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

**دویم مثال**: د $f(x)=\ln(x^2-5x+4)$ تابع مشتق پیدا کړئ.

**حل**:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\ln(x^2-5x+4) \\ g(x)=x^2-5x+4 \Rightarrow g'(x)=2x-5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (\ln g(x))'=\dfrac{g'(x)}{g(x)} \\ (\ln(x^2-5x+4))'=\dfrac{g'(x)}{g(x)}=\dfrac{2x-5}{x^2-5x+4} \end{array}$$

**دریم مثال**: د $f(x)=\log_a\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$ او $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$ تابع گانو مشتق پیدا کړئ.

**حل**: پوهېږو چې $\log_a\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}=\log_a(\dfrac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}$ دی، نو لیکلای شو چې:

$$\log_a\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}=\log_a(\frac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_a\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{1}{2}(\log_a(x^2+1)-\log_a(x^2-1))$$

$$(\log_a\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}})'=\frac{1}{2}(\log_a(x^2+1)-\log_a(x^2-1))'$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)}\log_a e-\frac{(x^2-1)'}{(x^2-1)}\log_a e]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2x}{x^2+1}\log_a e-\frac{2x}{x^2-1}\log_a e\right]=\frac{1}{2}\cdot 2x\log_a e\left[\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2-1}\right]$$

$$=\frac{-2x}{x^4-1}\log_a e$$

**حل**: پوهېږو چې $\ln\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}=\ln(\dfrac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}$ دی، نو لیکلای شو چې:

$$\ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}=\ln(\frac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1))$$

$$(\ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}})'=\frac{1}{2}[\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1)]'=\frac{1}{2}[(\ln(x^2+1))'-(\ln(x^2-1))']$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2x}{x^2-1})=\frac{-2x}{x^4-1}$$

**څلورم مثال**: د $y = e^{(x^2+1)}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

**حل**: پوهېږو چې که $y = e^u$ وي نو $y' = u'e^u$

$$y = e^{(x^2+1)} \Rightarrow y' = (x^2+1)' \cdot e^{x^2+1} = 2x \cdot e^{x^2+1}$$

**پنځم مثال**: د $y = \sqrt[x]{2}$ تابع مشتق په لاس راوړئ.

**حل**: پوهېږو چې که چېرې $y = a^u$ وي، نو $y' = u'a^u \ln a$ سره دی، نو:

$$y = \sqrt[x]{2} = (2)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow y' = (\frac{1}{x})' \cdot 2^{\frac{1}{x}} \ln 2 = \frac{-1}{x^2} \cdot 2^{\frac{1}{x}} \cdot \ln 2$$

**شپږم مثال**: د $y = x^{2x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

**حل**: که د معادلې له دواړو خواوو څخه طبیعي لوګاریتم ونیسو، په لاس راځي چې:

$$y = x^{2x}$$
$$\ln y = \ln x^{2x}$$
$$\ln y = 2x \ln x$$
$$(\ln y)' = (2x \ln x)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = 2\ln x + 2x \cdot \frac{1}{x}$$
$$y' = 2(\ln x + 1) \cdot y \Rightarrow y' = 2(\ln x + 1) \cdot x^{2x}$$

**اووم مثال**: د $y = 10^x$ تابع مشتق حساب کړئ.

**حل**: پوهېږو چې $y = a^x \Rightarrow y' = a^x \ln a$ دی، نو:

$$y = 10^x$$
$$y' = 10^x \cdot \ln 10$$

**اتم مثال**: د $y = e^{3x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

**حل**: که $u = 3x$ وضع شي، نو: $u'(x) = 3$

$$y = e^u$$
$$y' = e^u \cdot u' = e^{3x} \cdot 3$$
$$y' = 3e^{3x}$$

**نهم مثال**: د لاندې تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $y = \log(x^4 + 1)$ 2) $y = \log_3(\log_2 x)$ 3) $y = \log_{x^2-1} x^2 + 1$

**حل**: پوهېږو چې د لوګارتمي توابعو مشتق په مختلفو قاعدو سره د لاندې قضيې څخه په ګټه اخېستنې سره په لاس راوړو:

$$y=\log_a u$$

$$y'=(\log_a u)'=\frac{u'}{u}\log_a e=\frac{u'}{u\log_e a}=\frac{u'}{u\ln a}$$

$$1)\ \ y=\log(x^4+1)\ \ \Rightarrow\ y'=\frac{4x^3}{(x^4+1)\ln 10}$$

$$2)\ \ y=\log_3(\log_2 x)\ \ \Rightarrow\ y'=\frac{(\log_2 x)'}{\ln 3\log_2 x}=\frac{\frac{1}{x\ln 2}}{\ln 3\log_2 x}=\frac{1}{(\ln 2)(\ln 3)x\log_2 x}$$

$$=\frac{1}{\ln 2\cdot\ln 3\cdot x\cdot\frac{\log_e x}{\log_e 2}}=\frac{1}{\ln 2\cdot\ln 3\cdot x\cdot\frac{\ln x}{\ln 2}}=\frac{1}{\ln 3\,x\ln x}$$

$$3)\ \ y=\log_{x^2-1}x^2+1=\frac{\log_e(x^2+1)}{\log_e(x^2-1)}=\frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x^2-1)}$$

پوهېږو چې $y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}\ \Rightarrow\ y=\frac{u}{v}$ دی؛ نو لرو:

$$y'=\frac{\frac{2x}{x^2+1}\cdot\ln(x^2-1)-\frac{2x}{x^2-1}\ln(x^2+1)}{\left[\ln(x^2-1)\right]^2}$$



## پوښتنې

د لاندې توابعو مشتق پیدا کړئ:

$a)\ \ f(x)=\ln\sin 3x$

$b)\ \ f(x)=\ln\sqrt{3x^2+7}$

$c)\ \ f(x)=\ln(5x^2-6x+5)$

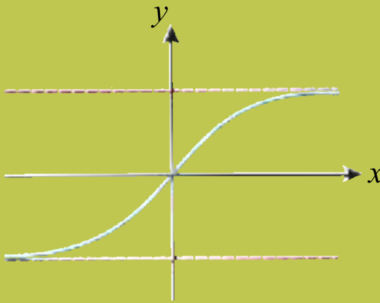
$d)\ \ f(x)=\log_{10}3x^2$

$e)\ \ f(x)=y=x^x$

$f)\ \ y=\dfrac{(x+1)^2(\sqrt{x}-1)}{(x+4)^3e^x}$

## د معکوسو تابع ګانو مشتق

مخامخ شکل د څه ډول تابع ګراف راښيي؟




کـه چېرې $f$ او $g$ يـوه د بلـې دوې معکوسـې تـابع ګـانې وي، يعنـې $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$ وي، نـو:

$y'_x = \frac{1}{x'_y}$ يا $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ دی، څکه چې د تابع او ضمني تابع ګانو له مشتق څخه ليکلای شو:

$$\left.\begin{array}{l} y = f(x) \\ x = g(y) \end{array}\right\} \Rightarrow y'_x \cdot x'_y = y'_y \quad \Rightarrow y'_x \cdot x'_y = 1 \quad \Rightarrow y'_x = \frac{1}{x'_y}$$

**مثال:** د $y = a^x$ تابع مشتق د هغې د معکوسې تابع په مرسته پيدا کړئ.

**حل:**

$$y = a^x \quad \Rightarrow x = \log_a y$$

$$\Rightarrow y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y}\log_a e} = \frac{1}{\frac{1}{y}}\log_e a = y\log_e a$$

$$y' = a^x \ln a$$

## د مثلثاتي معکوسو تابع ګانو مشتق

د مثلثاتي معکوسو تابع ګانو مشتق د لاندې اړيکو په مرسته لاسته راوړو:

1) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2) $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

3) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

4) $(arc\cot x)' = \frac{-1}{1+x^2}$

ثبوت:

1) $y = arc\sin x \quad \Leftrightarrow \quad x = \sin y$

$(arc\sin x)' = ?$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

$$\Rightarrow (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2) $y = arc\cos x \quad \Leftrightarrow \quad x = \cos y$

$(arc\cos x)' = ?$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}$$

$$\Rightarrow (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3) $y = arc\tan x \Leftrightarrow x = \tan y$

$$\Rightarrow (arc\tan x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y$$

$$= \frac{\cos^2 y}{1} = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y}$$

د کسر صورت او مخرج په $\cos^2 y$ ویشو:

$$(arc\tan x)' = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{1}{\tan^2 y + 1} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

4) $y = arc\cot x \Leftrightarrow x = \cot y$

$$(arc\cot x)' = ?$$

$$(arc\cot x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cot y)'} = \frac{1}{\frac{-1}{\sin^2 y}}$$

$$= -\sin^2 y = \frac{-\sin^2 y}{1} = \frac{-\sin^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y}$$

د کسر صورت او مخرج په $\sin^2 y$ ویشو:

$$= -\frac{\sin^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{-1}{1+\cot^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}$$

**لومړی مثال**: د $y = (\arctan x)^5$ تابع مشتق پیدا کړئ.

$$y' = 5(\arctan x)^4 (\arctan x)' = 5(\arctan x)^4 \frac{1}{1+x^2}$$

**دویم مثال**: د $y = \log_5(\arctan x)$ تابع مشتق پیدا کړئ.

$$y' = [\log_5(\arctan x)]' = (\log_5 u)' = \frac{u'}{u\log_5 e}$$

$$= \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\arctan x \log_5 e} = \frac{1}{(1+x^2)(\arctan x \ln 5)}$$

**دریم مثال**: د $y = arc\tan e^x$ تابع د مشتق مقدار د $x = 0$ ټکي کې پیدا کړئ.

$$y' = \left[arc\ \tan e^x\right]' = (arc\tan u)' = \frac{u'}{1+u^2} = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$$

$$y'(0) = \frac{e^0}{1+e^0} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$



## پوښتنې

1. د لاندې تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $y = (arc\sin x)^3$

2) $y = \log_2(arc\cos x)$

## قسمي کسرونه

### د یو کسر تجزیه کول په قسمي کسرونو:

$$\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x^2-1}=\frac{2x-1}{x^2-1}$$

پوهېږو چې د $\frac{2}{x+1}$ او $\frac{1}{x^2-1}$ د جمعې حاصل $\frac{2x-1}{x^2-1}$ دی، آیا کولای شئ چې له دې کسر څخه د $\frac{2}{x+1}$ او $\frac{1}{x^2-1}$ کسرونه لاسته راوړئ.




- د $\frac{7}{x+1}$ ، $\frac{5}{x-2}$ او $\frac{2}{x-5}$ کسرونه سره جمع کړئ.
- د پورته کسرونود جمعې حاصل، بېرته په لومړنیو کسرونو واړوئ.
- واقعي کسرونه څه ډول کسرونه دي، تعریف یې کړئ.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

**تعریف**: د یوه واقعي کسر هغه کوچنی کسرونه چې د جمعې د عواملو په شکل لیکل شوي وي، که چېرې هغوی سره جمع کړو، راکړل شوی واقعي کسر به په لاس راشي، نو دا جمع شوي لومړني کسرونه د قسمي کسرونو په نامه یادېږي.

د یوه واقعي کسر د تجزیه کولو لپاره لاندې حالتونه په پام کې نیسو:

### لومړی حالت:

که چېرې د $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ ناطق کسر مخرج ( $P_n(x)$ ) له خطي بېلابېلو ضربي عواملو څخه جوړ شوي وي او تکرار نه وي په لاندې بڼه بدلېدلای شي:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}+\frac{C}{x-x_3}+\ \cdots\ +\frac{N}{x-x_n}$$

( $A, B, C$ .... حقیقي عددونه دي)

**لومړی مثال**: د $\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$ کسر په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

**حل**: د مخرج پولینوم په لومړنیو ضربي عواملو تجزیه کوو، نو په لاس راځي:

$$x^3-4x^2-7x+10=(x-5)(x-1)(x+2)$$

ليدل کېږي چې نوموړی کسر له درو قسمي کسرونو څخه جوړ شوی دی، صورتونه يې $C , B , A$ ټاکو:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A(x-1)(x+2)+B(x-5)(x+2)+C(x-1)(x-5)}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{Ax^2+Ax-2A+Bx^2-3Bx-10B+Cx^2-6Cx+5C}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{(A+B+C)x^2+(A-3B-6C)x+(-2A-10B+5C)}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

ليدل کېږي چې د دواړو خواوو د کسرونو مخرجونه سره برابر دي، نو بايد صورتونه هم سره برابر وي، نو د مطابقت د خواصو(د ورته حدونو ضريبونه سره مساوي وي) څخه په ګټه اخستنې سره ليکو:

$$\begin{cases} A+B+C=4 \\ A-3B-6C=-1 \\ -2A-10B+5C=-39 \end{cases}$$

د پورته سيستم له حل څخه وروسته $B=3, A=2$ او $C=-1$ په لاس راځي، نو:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{2}{x-5}+\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x+2}$$

**دويم مثال**: د $\dfrac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}$ کسر په قسمي کسرونو تجزيه کړئ.

**حل**: لومړی نوموړی کسر په واقعي کسر بدلوو او بيا پورتنی طريقه پرې تطبيقوو:

$$\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}=3x+\frac{4x-1}{x^2-2x-8} \Rightarrow \frac{4x-1}{x^2-2x-8}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+2}$$

$$=\frac{A(x+2)+B(x-4)}{(x-4)(x+2)}=\frac{(A+B)x+(2A-4B)}{x^2-2x-8}$$

$$\left.\begin{aligned} A+B&=4 \\ 2A-4B&=-1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A=\frac{5}{2} \qquad , \qquad B=\frac{3}{2}$$

$$\frac{3x^2-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}=3x+\frac{5}{2(x-4)}+\frac{3}{2(x+2)}$$

**دویم حالت**:

که د کسر د مخرج ضربي عوامل لومړی درجه پولینوم وي چې ځینې یې تکرار راغلی وي، یعنې که د $x-x_0$ عامل $n$ ځلې په مخرج کې تکرار شوی وي، نو لیکلای شو چې:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_0}+\frac{B}{(x-x_0)^2}+\cdots+\frac{N}{(x-x_0)^n}$$

**لومړی مثال**: د $\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$ واقعي کسر په قسمي کسرونو تجزیه کړئ:

**حل**: د مخرج د پولینوم ضربي عوامل په لاس راوړو:

$$x^3-4x^2+5x-2=(x-1)(x-2)(x-1)$$

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{3x^2-6x+2}{(x-2)(x-1)^2}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{A(x-1)^2+B(x-2)(x-1)+C(x-2)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$=\frac{(A+B)x^2+(-2A-3B+C)x+(A+2B-2C)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$\left.\begin{aligned}A+B&=3\\-2A-3B+C&=-6\\A+2B-2C&=2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{aligned}A&=2\\B&=1\\C&=1\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

**دریم حالت**:

که د مخرج ضربي عوامل دویمه درجه پولینوم چې د تجزیې وړ نه وي او تکرار هم نه وي راغلی، نو د $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$

واقعي پولینوم د یو قسمي کسر $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ بڼه لري.

**لومړی مثال**: د $\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}$ کسر په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

**حل**: د مخرج پولینوم ضربي عوامل عبارت دی له:

$$x^3+3x^2+6x+4=(x+1)(x^2+2x+4)$$

څرنګه چې د $x^2+2x+4$ درې جمله‌يي د حقيقي عددونو په سټ کې حل نه لري، نو په دې ساحه کې د تجزيې وړ نه ده. له دې امله ليکو:

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+4}+\frac{C}{x+1}=\frac{(Ax+B)(x+1)+C(x^2+2x+4)}{(x^2+2x+4)(x+1)}$$

$$=\frac{(A+C)x^2+(A+B+2C)x+(B+4C)}{(x^2+2x+4)(x+1)}$$

$$\left.\begin{array}{l}A+C=5\\A+B+2C=8\\B+4C=9\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}A=3\\B=1\\C=2\end{array}\Rightarrow\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{3x+1}{x^2+2x+4}+\frac{2}{x+1}$$



## پوښتنې

لاندې کسرونه په قسمي کسرونو تجزيه کړئ.

-1

$a)\ \frac{-x^2+2x-12}{x^3+2x^2+6x+5}$ $\quad b)\ \frac{4x^2-3x+8}{x^3-2x+4}$ $\quad c)\ \frac{2x^4-8x^3+7x^2-3x+4}{x^2-9x+3}$

-2

$a)\ \frac{1}{x^4(x+1)}$ $\quad b)\ \frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$ $\quad c)\ \frac{x^4+1}{x^2(x-1)}$

$d)\ \frac{3x^2+5x+10}{x^3+2x^2-4x-8}$ $\quad e)\ \frac{3x^2-18x+36}{x^3-6x^2+9x}$

-3

$a)\ \frac{3x+7}{(x^2+x+1)(x^2-4)}$ $\quad b)\ \frac{x^2+3x+4}{x^4-2x^2+1}$

$c)\ \frac{x^2+13x+10}{x^3-5x^2}$ $\quad d)\ \frac{x^5}{x^4-1}$

## د اکسپوننشل تابع ګانو انتيګرالونه

مخامخ اړيکې سره پرتله کړئ.

$$\log_a b = x$$

$$a^x = b$$




- د $f(x) = a^x$ تابع څه ډول تابع ده، نوم يې واخلئ.
- د لوګاريتمي تابع يوه بېلګه وليکئ.
- د $\log_a x = C$ اړيکه په اکسپوننشيل ډول وليکئ.

له پورتني فعاليت څخه ليکلای شو چې:

د $f(x) = e^x$ طبيعي اکسپوننشيل تابع لپاره لرو $\int e^x dx = e^x + C$ نو په عمومي ډول

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} \quad , \ a \neq 1 \quad , \ a \in IR^+$$

**ثبوت**: له تعويضي طريقې څخه په کار اخيستنې سره لرو:

$$u = a^x$$

$$du = \ln a \cdot a^x dx$$

$$dx = \frac{du}{\ln a \cdot a^x} = \frac{du}{u \ln a}$$

$$\int a^x dx = \int u \frac{du}{u \ln a} = \frac{1}{\ln a} \int dx$$

$$\frac{1}{\ln a} u = \frac{1}{\ln a} a^x = \frac{a^x}{\ln a} \Rightarrow \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

**لومړی مثال**: د $f(x)=2^{x-3}$ اکسپوننشیل تابع انتیګرال غواړو پیدا کړو:

د توان له قانون څخه لرو:

$$2^{x-3}=\frac{2^x}{2^3}=\frac{1}{8}2^x$$

$$\int 2^{x-3}dx=\int\frac{1}{8}2^x dx=\frac{1}{8}\int 2^x dx$$

$$\frac{1}{8}\int 2^x dx=\frac{1}{8}\cdot\frac{2^x}{\ln 2}+C$$

**دویم مثال**: دلاندې اکسپوننشیل تابع ګانو انتیګرالونه پیدا کړئ.

1) $\int 3^{x+1}\,dx=?$  2) $\int 6^{x-1}\,dx=?$

**حل**:

1) $\int 3^{x+1}\,dx=?$

$$3^{x+1}=3^x\cdot 3$$

$$\int 3^x\cdot 3\,dx=3\int 3^x\,dx=3\cdot\frac{3^x}{\ln 3}+C$$

2) $\int 6^{x-1}\,dx=?$

$$6^{x-1}=\frac{6^x}{6}=\frac{1}{6}\cdot 6^x$$

$$\int\frac{1}{6}6^x\,dx=\frac{1}{6}\int 6^x\,dx=\frac{1}{6}\cdot\frac{6^x}{\ln 6}+C$$



**پوښتنې**

د لاندې اکسپوننشیل تابع ګانو انتیګرالونه محاسبه کړئ.

$a)\ \int 3^{x-1}dx$  $b)\ \int 2^{-x}dx$  $c)\ \int a^{x+b}dx$

$d)\ \int\frac{1}{a^x}dx$  $e)\ \int 2^x\cdot 3^x dx$  $f)\ \int\frac{2^x}{3^x}dx$

$g)\ \int\frac{4^{x+3}}{2^x}dx$  $h)\ \int\frac{5^x+3^x}{2^x}dx$  $i)\ \int(1+2^x)dx$

## د لوګاریتمي تابع ګانو انتیګرال

وښیئ چې د تابع په کوم حالت کې نزولي او په کوم حالت کې صعودي ده.

$$y = a^x$$

$$\int a^x dx = ?$$




- لوګاریتم په څو ډوله دی، د هر ډول عمومي رابطه ولیکئ.
- د $x = a^y$ او $y = \log_a x$ معادلې یو له بل سره څه اړیکه لري.
- د $x = b^y$ او $y = \log_b x$ تابع ګانو ګراف رسم کړئ.
- آیا کولای شو چې د لوګاریتمي تابع ګانو انتیګرال ونیسو؟

له پورتني فعالیت څخه پایله داسې بیانوو:

که $(x \in IR^+)$ $f(x) = \ln x$ وي د طبیعي لوګاریتم د تابع لپاره لیکلای شو: $\int \ln dx = x \cdot \ln x - x + C$

که $(x, a \in IR^+, a \neq 1)$ $f(x) = \log_a x$ وي د معمولي لوګاریتم تابع لپاره لیکلای شو:

$$\int \log_a x\, dx = x \log_a \frac{x}{e}$$

**ثبوت:**

1- که $a = e$ وضع شي، نو:

$$\int \log_a x\, dx = x \log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_e x\, dx = \int \ln x dx = x \log_e \frac{x}{e} = x(\log_e x - \log_e e)$$

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$$

-2

$$\int \log_a x\,dx = x\log_a \frac{x}{e} + C$$

$$u = \log_a x \quad , \quad du = \frac{1}{x}\log_a e\,dx$$

$$dv = dx \quad , \quad v = x$$

$$\int \log_a x\,dx = x\log_a x - \int x\frac{1}{x}\log_a e\,dx$$

$$= x\log_a x - \log_a e\int dx$$

$$= x\log_a x - x\log_a e = x(\log_a x - \log_a e) = x\log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_a x\,dx = x\ \log_a \frac{x}{e} + C$$

**مثال**: د $\int \ln 3x dx$ غیرمعین انتیګرال غواړو پیدا کړو:

**حل**:

$$\int \ln 3x dx = \int (\ln 3 + \ln x)dx = \int \ln 3\,dx + \int \ln x\,dx$$

$$= x\ln 3 + x\ln x - x$$

$$= x(\ln 3 + \ln x) - x = x(\ln 3x - 1)$$

**یادونه**:

$(I)$ د تعویض Substitution له لارې کولای شو د غیرمعین انتیګرال حل پیدا کړو.

**لومړی مثال**:لاندې انتیګرالونه پیدا کړئ.

**حل**:

$$a)\quad I = \int \frac{1}{2}e^{-2x-3}dx$$

$$-2x - 3 = u, \qquad -2 = \frac{du}{dx} \quad , \quad dx = -\frac{1}{2}du$$

$$I = \int \frac{1}{2}e^{u}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)du = -\frac{1}{4}\int e^{u}du = -\frac{1}{4}e^{u} + C = -\frac{1}{4}e^{-2x-3} + C$$

$$b)\quad I = \int \frac{2dx}{x+2}$$

$$x + 2 = u, \qquad 1 = \frac{du}{dx} \qquad dx = du$$

$$I = \int \frac{2du}{u} = 2\int \frac{du}{u} = 2\ln|u| + C = 2\ln|x+2| + C$$

**دویم مثال**: د $f(x)=e^{2x}$ تابع انتیګرال ونیسئ:

**حل**:

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow \int f(x)dx=\int e^{2x}dx=?$$

$$u=2x \Rightarrow du=2dx$$

$$dx=\frac{du}{2}$$

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow \int f(x)dx=\int e^{u}\cdot\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int e^{u}\,du$$

$$\int e^{2x}dx=\frac{e^{u}}{2}+C=\frac{e^{2x}}{2}+C=\frac{1}{2}e^{2x}+C$$

آزمايښت: $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+C \Rightarrow F'(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2=e^{2x}=f(x)$

**دریم مثال**: د $f(x)=x\cdot\ln x^{2}$ انتیګرال حساب کړئ.

**حل**:

$$f(x)=x\cdot\ln x^{2} \Rightarrow \int f(x)dx=\int (x\cdot\ln x^{2})dx=?$$

$$u=x^{2}$$

$$du=2x\,dx \Rightarrow dx=\frac{1}{2}du$$

$$\int f(x)\,dx=\int x\cdot\ln u\cdot\frac{1}{2x}du=\frac{1}{2}\int \ln u\,du=\frac{1}{2}[u\cdot\ln u-u+C]=\frac{1}{2}u\cdot\ln u-\frac{1}{2}u+C$$

$$=\frac{1}{2}x^{2}\cdot\ln x^{2}-\frac{1}{2}x^{2}+C$$

$(II)$ معین انتیګرالونه هم د بدلون(تعویض) له لارې حل کېږي.

**لومړی مثال**: د $\int_{-1}^{1} e^{2x}\,dx$ انتیګرال پیدا کړئ.

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow \int_{-1}^{1} e^{2x}\,dx$$

$$u=2x \Rightarrow du=2\,dx \Rightarrow dx=\frac{1}{2}du$$

$$\left.\begin{array}{l} x=-1,\ u=2x \Rightarrow u=2(-1)=-2 \\ x=1,\ u=2x \Rightarrow u=2(1)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \int_{-1}^{1} e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^{u}\,du=\frac{1}{2}\left[e^{u}\right]_{-2}^{2}=3.627$$

**دويم مثال:** د $f(x)=\int_1^2 2x\cdot\ln x^2 dx$ انتيګرال قيمت پيدا کړئ.

$$u=x^2$$

$$du=2x\,dx \Rightarrow dx=\frac{1}{2x}du$$

$$\left.\begin{array}{l} x=1 \;,\; u=x^2=1 \\ x=2 \;,\; u=x^2=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \int_1^2 2x\cdot\ln x^2 dx=\int_1^4 2x\cdot\ln u\cdot\frac{1}{2x}du=\int_1^4 \ln u\,du$$

$$=\left[u\cdot\ln u-u\right]_1^4=\left[4\cdot\ln 4-4\right]-\left[1\cdot\ln 1-1\right]\approx 2.545$$



## پوښتني

لاندې انتيګرالونه حل کړئ.

$a)\ \int \ln 2x^3 dx$ $b)\ \int \ln\sqrt{x}dx$ $c)\ \int \log\frac{x}{2}dx$

$d)\ \int 3\log\frac{1}{x}dx$ $e)\ \int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}}dx$

## د قسمي کسرونو په مرسته د انټيګرال محاسبه

د مخامخ کسر قسمي کسرونه پيدا کړئ.

$$\frac{5}{x^2-3x+2}=\frac{?}{(x-2)}+\frac{?}{(x-1)}$$

مخکې مو د قسمي کسرونو تجزيه مطالعه کړه اوس غواړو چې د هغو تابع ګانو انټيګرالونه د قسمي کسرونو په واسطه تر څېړنې لاندې ونيسو.

**لومړی مثال**: $\int \frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx$ محاسبه کړئ.

**حل**: د قسمي کسرونو د تجزيې په مرسته ليکلای شو:

$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x-4)}$$

$$\frac{A(x-4)+B(x-2)}{(x-2)(x-4)}=\frac{Ax-4A+Bx-2B}{(x-2)(x-4)}=\frac{(A+B)x-4A-2B}{(x-2)(x-4)}$$

$$A+B=7$$

$$-4A-2B=-12$$

$$A=7-B$$

$$-4(7-B)-2B=-12$$

$$-28+4B-2B=-12$$

$$-28+2B=-12$$

$$2B=16 \quad\Rightarrow\quad B=8$$

$$A=7-8=-1$$

$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8}=-\frac{1}{x-2}+\frac{8}{x-4}$$

نو ليکلای شو چې:

$$\int\frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=\int\frac{-1}{x-2}dx+\int\frac{8}{x-4}dx$$

$$\int\frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=-\int\frac{1}{x-2}dx+8\int\frac{1}{x-4}dx$$

$$=-\ln|x-2|+8\ln|x-4|+C=\ln(x-2)^{-1}+\ln(x-4)^8+C$$

$$=\ln\left[(x-2)^{-1}\cdot(x-4)^8\right]=\ln\left[\frac{(x-4)^8}{x-2}\right]+C$$

**دويم مثال**: د $\int \frac{-5x+9}{x^2+x-6}dx$ انتيګرال محاسبه کړئ.

**حل**: مخرج په فکټورونو تجزيه کوو: $x^2+x-6=(x-2)(x+3)$

نو:

$$\frac{-5x+9}{x^2+x-6}=\frac{-5x+9}{(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3}$$

$$\frac{A(x+3)+B(x-2)}{(x-2)(x+3)}=\frac{Ax+3A+Bx-2B}{(x-2)(x+3)}=\frac{(A+B)x+3A-2B}{(x-2)(x+3)}$$

$$(A+B)x+3A-2B=-5x+9$$

$$A+B=-5\Rightarrow A=-5-B$$

$$3A-2B=-5x+9$$

د $A$ او $B$ عددي قيمتونه عبارت دي له:

$$3(-5-B)-2B=9$$

$$-15-5B=9$$

$$-5B=24$$

$$B=-\frac{24}{5}$$

$$A=-5+\frac{24}{5}=\frac{-25+24}{5}=-\frac{1}{5}$$

$$\frac{-5x+9}{x^2+x-6}=\frac{-\frac{1}{5}}{x-2}-\frac{\frac{24}{5}}{x+3}$$

$$\int\frac{-5x+9}{x^2+x-6}=\int\frac{-\frac{1}{5}}{x-2}dx-\int\frac{\frac{24}{5}}{x+3}dx=-\frac{1}{5}\int\frac{1}{x-2}dx-\frac{24}{5}\int\frac{1}{x+3}dx$$

$$=-\frac{1}{5}\ln(x-2)-\frac{24}{5}\ln(x+3)$$

$$=\ln(x-2)^{-\frac{1}{5}}+\ln(x+3)^{-\frac{24}{5}}=\ln\left[(x-2)^{-\frac{1}{5}}\cdot(x+3)^{-\frac{24}{5}}\right]+C$$

**پوښتنې**

لاندې انتيګرالونه د قسمي کسرونو په طريقه حل کړئ.

a) $\int\frac{x+2}{x^3-3x^2-x+3}dx$ b) $\int\frac{x-2}{x^2-6x+5}dx$ c) $\int\frac{x^6}{x^4+3x^2+2}dx$

## د څپرکي مهم ټکي

- که $f(x)=e^x$ وي، نو ددې تابع مشتق عبارت له $f'(x)=e^x$ دی.
- که $f(x)=a^x$ وي، د دې تابع مشتق $f'(x)=a^x\cdot\ln a$ دی.
- که $f(x)=\log_a x$ وي، نو د تابع مشتق $f'(x)=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}$ دی.
- $f(x)=\log_a g(x)$ وي، نو د تابع مشتق $(\log_a g(x))'=\frac{g'(x)}{g(x)}\log_a e$ دی.
- **قسمي کسرونه**: د یوه واقعي کسر هغه کوچنی کسرونه چې د جمعې د عواملو په شکل لیکل شوي دي که هغوی جمع کړو، راکړل شوي واقعي کسر په لاس راځي، قسمي کسرونه بلل کېږي.
- که چېرې د $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ د کسري پولینوم مخرج ( $P_n(x)$ ) د خطي بېلابېلو ضربي عواملو څخه جوړوي چې تکرار نه وي راغلی په لاندې بڼه بدلیدلای شي:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}+\frac{C}{x-x_3}+\cdots+\frac{N}{x-x_n}$$

- که د لومړی درجه پولینوم مخرج ضربي عوامل چې ځینې یې تکرار راغلي وي، یعنې که د $x-x_0$ عامل $n$ ځلې تکرار شوی وي، نو لیکلای شو چې:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_0}+\frac{B}{(x-x_0)^2}+\cdots+\frac{N}{(x-x_0)^n}$$

- که د مخرج ضربي عوامل دویمه درجه پولینوم د تجزیې وړ نه وي او تکرار هم نه وي راغلی، نو د $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ واقعي پولینوم یو ټوټه کسر $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ بڼه لري.
- د اکسپوننشیل تابع ګانو انتیګرال لپاره لیکلای شو:

$$\int e^x dx=e^x+C \quad , \quad \int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C \quad , \quad (a\in IR^+\ ,\ a\neq 1)$$

- د لوګارتمي توابعو د انتیګرال لپاره لیکلای شو:

$$\int \ln x\, dx=x\ln x-x+C \quad , \quad \int \log_a x\, dx=x\log_a \frac{x}{e}+C$$

- ځینې تابع ګانې چې پرته د بدلون له لارې حل کېږي، لیکو:

$$f(x)=e^x \Rightarrow \int f(x)\,dx=\int e^x\,dx=e^x+C$$

## د پنځم څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنې حل کړئ.

1. د $f(x)=\ln(\frac{x-2}{x+2})$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

2. د $f(x)=\ln\sqrt{x-1}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

3. د $y=2x^{2x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

4. د $f(x)=\log\sqrt{x^3}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

5. لاندې کسرونه په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

1) $\frac{x+1}{x^2-x-6}$ 2) $\frac{x^2-x+1}{x^3+2x^2+x}$ 3) $\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}$

6. لاندې انتیګرالونه پیدا کړئ.

1) $\int 5t^7dt$ 2) $\int \frac{x^3-3}{x^2}dx$

3) $\int (2\cos x-5\sin x+e^x)dx$ 4) $\int \sqrt{\cos x}\sin xdx$

5) $\int xe^{-x}dx$ 6) $\int (\frac{5}{(2x+1)(x-2)})dx$

7) $\int_{-1}^{1}3x^2\sqrt{x^3+1}dx$

7 – د لاندې تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

$a)\ y=\ln(x^2+x+1)$ $b)\ y=\ln(\sin x)$

$c)\ y=e^{x^2+1}$ $d)\ y=\sqrt[x]{2}$

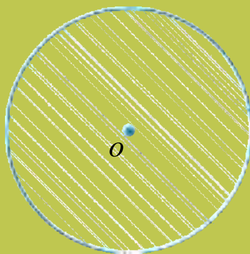
# شپږم څپرکی

## د انتیگرال تطبیقات

## د منحني ګانو پواسطه د محصور شوي سطحې د مساحت محاسبه

*Accounting of area bounded by one curve*

د مخامخ شکل مساحت چې یوه سطحه د یوې منحني په واسطه ترل شوې دایره ده. د مساحت فورمول یې وویاست.







د $y=1-x^2$ تابع په پام کې ونیسئ.

- د تابع بحراني (*Critical Point*) ټکي او د $x$ محور سره د تقاطع ټکي پیدا او ګراف یې رسم کړئ.
- د $y=1-x^2$ تابع او $x$ محور تر منځ د سطحې د مساحت قیمت د انتیګرال په مرسته پیدا کړئ.
- پورتنی فعالیت د $y=-x^2+2x$ تابع لپاره تکرار کړئ او د منحني او د $x$ د محور تر منځ محصور شوی مساحت محاسبه کړئ.

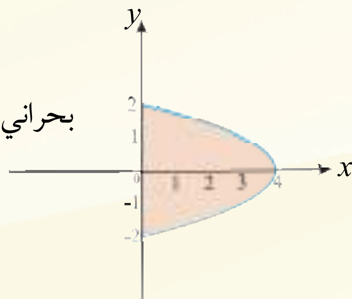
له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې لاسته راځي:

ـ $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$ انتیګرال د یوې سطحې د مساحت قیمت راښیي چې د $y=f(x)$ منحني او د $x$ محور او د $x=a$ , $x=b$ د کرښو له خوا رابند (محصور) دی.

ـ که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ ترلې انټروال کې مثبت او متمادي وي، یعنې $y=f(x)\geq 0$ په دې صورت کې $f(x)$ تابع ګراف تل د $x$ محور پورته خواته او که $y=f(x)\leq 0$ وي، په دې حالت کې $f(x)$ تابع ګراف د $x$ محور لاندې خواته واقع ده او منفي دی.

**لومړی مثال:** د $x=4-y^2$ تابع د منحني او د $y$ د محور تر منځ محصور شوی مساحت پیدا کړئ.

**حل**: لومړی د تابع بحراني ټکي او د $y$ محور سره د تقاطع ټکي پیدا کوو، وروسته یې شکل رسموو، د بحراني ټکي د پیداکولو لپاره لومړی د تابع مشتق نیسو او له صفر سره یې مساوي کوو او له محورونو سره د تقاطع ټکو د په لاس راوړلو لپاره تابع له صفر سره برابروو.




$$x = 4 - y^2 \Rightarrow x' = -2y = 0$$

$$x' = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$$

$$y = 0\,, \quad x = 4 - y^2 \Rightarrow x = 4 - 0 \Rightarrow x = 4 \quad \Rightarrow \quad (4,0)$$ بحراني ټکی

$$x = 0 \quad , \quad 4 - y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = 4$$

$$y = \pm 2 \quad \Rightarrow \quad (0,2) \quad , \quad (0,-2)$$ د محورونو سره د تقاطع ټکي

څرنګه چې د $x = 4 - y^2$ معادله په $[-2,2]$ انټروال کې نظر $x$ محور ته دواړه ټکي متناظر دي، نو د نمایي مساحت په پام کې نیولو سره، د انتیګرال د مساحت سرحدات په لاندې ډول په لاس راوړو:

$$A = \int_{-2}^{2} (4 - y^2)\, dy = 2 \int_{0}^{2} (4 - y^2) dy = 2[4y - \frac{y^3}{3}]_0^2$$

$$A = 2\,[(4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3}) - 0] = 2\,(8 - \frac{8}{3}) = 2\,(\frac{24-8}{3}) = 2\,(\frac{16}{3}) = \frac{32}{3}$$

**دویم مثال**: د $x$ محور او د $y = 1 - \frac{1}{2}x^2$ تابع منحني د محصور شوي سطحې مساحت محاسبه کړئ.

**حل**: د محصور شوي سطحې د مساحت ټاکلو لپاره لومړی بحراني ټکي او د $x$ له محور سره د تقاطع ټکي په لاس راوړو.

$$y = 1 - \frac{1}{2}x^2\,, \quad y' = -x$$

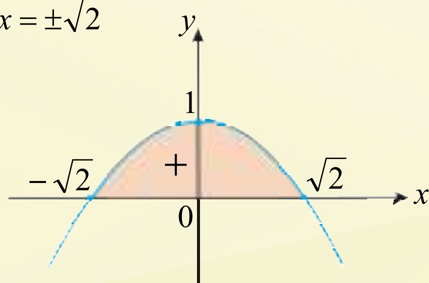
$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

$$x = 0,\; y = 1 - \frac{1}{2}x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad y = 1 - \frac{1}{2}0^2 \quad \Rightarrow \quad y = 1 \quad \Rightarrow \quad (0,1)$$ بحراني ټکي

$$y = 0, 1 - \frac{1}{2}x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}x^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 2,\; x = \pm\sqrt{2}$$

$$x_1 = \sqrt{2} \quad , \quad x_2 = -\sqrt{2}$$

$$(\sqrt{2},0)\,,\; (-\sqrt{2},0)$$ له محورونو سره د تقاطع ټکي



$$A=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(1-\frac{1}{2}x^2)\,dx=2\int_{0}^{\sqrt{2}}(1-\frac{1}{2}x^2)\,dx=2([x-\frac{1}{6}x^3]_0^{\sqrt{2}})$$

$$A=2(\sqrt{2}-\frac{(\sqrt{2})^3}{6}-0)=2(\frac{6\sqrt{2}-(\sqrt{2})^3}{6})=2(\frac{6\sqrt{2}-\sqrt{8}}{6})$$

$$=(\frac{6\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{3})=\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$A=1.8853$$

**دریم مثال**: د $y=x^2-3$ تابع ګراف د $x$ له محور سره یوه سطحه رابند وي، د دې سطحې مساحت پیدا کړئ.

**حل**: لومړی د سطحې د ټاکلو لپاره د تابع ګراف رسموو او د تابع بحراني ټکي او د تقاطع ټکي په لاس راوړو:

$$y=x^2-3 \Rightarrow y'=2x$$

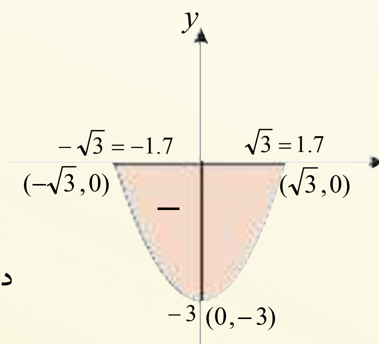
$$y'=0 \Rightarrow x=0$$

$$x=0\ ,\ y=x^2-3 \Rightarrow y=0^2-3$$

$\Rightarrow y=-3 \Rightarrow (0,-3)$ بحراني ټکي

$$y=0\ ,\ \ x^2-3=0 \Rightarrow x^2=3$$

$x=\pm\sqrt{3} \Rightarrow (\sqrt{3},0)\ \ ,\ \ (-\sqrt{3},0)$ د محورونو سره د تقاطع ټکي




څرنګه چې د $y=x^2-3$ تابع په $[\sqrt{3},-\sqrt{3}]$ انټروال کې د محور سره د تقاطع ټکي متناظر قیمتونه لري، نو ګراف یې د $x$ له محور څخه لاندې دی او انتیګرال یې منفي دی، نو له ټول مساحت څخه د انتیګرال د سرحدونو نیمایي مساحت پیدا کوو او په 2 کې یې ضربوو:

$$A_1=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(x^2-3)\,dx=-2\int_{0}^{\sqrt{3}}(x^2-3)\,dx=-2(\int_{0}^{\sqrt{3}}x^2\,dx-3\int_{0}^{\sqrt{3}}dx)=-2([\frac{1}{3}x^3]_0^{\sqrt{3}}-[3x]_0^{\sqrt{3}})$$

$$=-2(\frac{1}{3}[(\sqrt{3})^3-0]-3[\sqrt{3}-0])=-2(\frac{1}{3}(\sqrt{3})^3-3\sqrt{3})$$

$$=-\frac{2}{3}(\sqrt{3})^3+6\sqrt{3}=-\frac{2}{3}(1.7)^3+6(1.7)=-\frac{2}{3}(4.913)+10.2=-\frac{9.826}{3}+10.2$$

$$=-3.2753+10.2=6.9247$$

**خلورم مثال**: د $y = x^2 - 3x$ تابع ګراف رسم د منحني او $x$ محور تر منځ د سطحې مساحت په $[-1,4]$ انټروال کې وټاکئ.

**حل**: لومړی د منحني بحراني ټکی او له له محورونو سره د تقاطع ټکي پيدا کوو:

$$y = x^2 - 3x$$

$$y' = 2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3\ ,\ x = \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{3}{2},\quad y = x^2 - 3x \Rightarrow y = (\frac{3}{2})^2 - 3(\frac{3}{2})$$

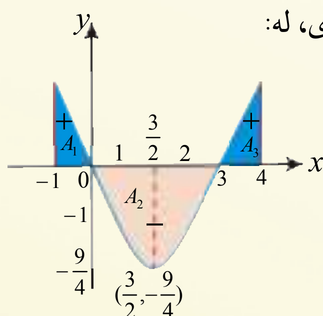
$$y = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = -\frac{9}{4}\ ,\quad (x, y) = (\frac{3}{2}, -\frac{9}{4})$$ بحراني ټکی

څرنګه چې $y'' = 2 > 0$ دی، نو د $(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4})$ ټکي د تابع مطلق اصغري ټکي دي او د تقاطع ټکي يې د $x$ له محور سره عبارت دی، له:

$$y = 0 \Rightarrow x^2 - 3x = 0$$

$$\Rightarrow x(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0\quad ,\quad x_2 = 3$$




$$A = A_1 - A_2 + A_3 = \int_{-1}^{0}(x^2 - 3x)\,dx - \int_{0}^{3}(x^2 - 3x)\,dx + \int_{3}^{4}(x^2 - 3x)\,dx$$

$$A = [\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2]_{-1}^{0} - [\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2]_{0}^{3} + [\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2]_{3}^{4}$$

$$A = [(\frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{3}{2}\cdot 0) - (\frac{1}{3}\cdot(-1)^3 - \frac{3}{2}\cdot(-1)^2)] - [(\frac{1}{3}\cdot 3^3 - \frac{3}{2}\cdot 3^2) - (\frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{3}{2}\cdot 0)] +$$

$$[(\frac{1}{3}\cdot(4)^3 - \frac{3}{2}\cdot(4)^2) - (\frac{1}{3}\cdot(3)^3 - \frac{3}{2}\cdot(3)^2)]$$

$$= -(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2}) - (\frac{1}{3}\cdot 27 - \frac{3}{2}\cdot 9) + (\frac{1}{3}\cdot 64 - \frac{3}{2}\cdot 16) - (\frac{1}{3}\cdot 27 - \frac{3}{2}\cdot 9)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2} + \frac{64}{3} - \frac{48}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2}$$

$$= \frac{1 - 27 + 64 - 27}{3} + \frac{3 + 27 - 48 + 27}{2} = \frac{65 - 54}{3} + \frac{57 - 48}{2} = \frac{11}{3} + \frac{9}{2} = \frac{22 + 27}{6} = \frac{49}{6}$$

**پنځم مثال**: د $y = x^2 - 2x$ منحني او x محور ترمنځ مساحت د $[-1,2]$ په انټروال کې پیدا کړئ.

**حل**: لومړی بحراني ټکي وروسته د $x$ له محور سره د تقاطع ټکي په لاس راوړو:

$$y = x^2 - 2x \Rightarrow y' = 2x - 2 = 0$$

$$2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

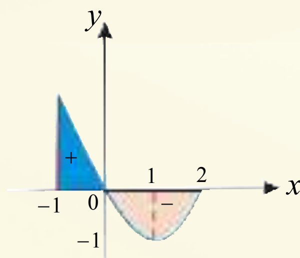
$x = 1 \ , \quad y = x^2 - 2x = 1^2 - 2(1) = -1 \Rightarrow (1,-1)$ بحراني ټکي

څرنګه چې $y'' = 2 > 0$ دی، نو تابع د $(1,-1)$ په ټکي کې مطلق اصغري لري او د $x$ لـه محور سـره يـې تقاطع په لاندې ډول ده.

$$y = 0 \quad , \quad x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 2$$




څرنګه چې منحني د $[-1,2]$ په انټـروال کـې لـه مبـدأ څخـه تيرېـږي او د منحنـي يـوه برخـه د $[-1,0]$ پـه انټروال کې د $x$ محور پورته خواته او بله برخه يې د $[0,2]$ په فاصلې کې د $x$ محور ښکته خواته پرتـه ده انټيګرال يې منفي دی:

$$A = \int_{-1}^{0} (x^2 - 2x)dx - \int_{0}^{2} (x^2 - 2x)\,dx = [\frac{1}{3}x^3 - x^2]_{-1}^{0} - [\frac{1}{3}x^3 - x^2]_{0}^{2}$$

$$= (0 - (-\frac{1}{3} - 1)) - ((\frac{8}{3} - 4) - 0) = -(-\frac{1}{3} - 1) - (\frac{8}{3} - 4) = -(\frac{-1-3}{3}) - (\frac{8-12}{3})$$

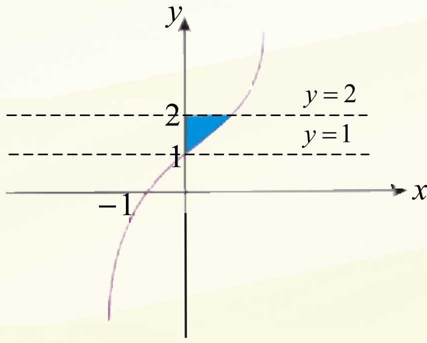
$$= -(\frac{-4}{3}) - (\frac{-4}{3}) = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$



## پوښتنې

1- د $f(x)=\sin x$ منحني او د $x$ محور تر منځ مساحت په $[-2\pi, 2\pi]$ انټروال کې حساب کړئ.

2- د $y=x^3+1$ تـــابع منحنـــي او $y=1$ ، $y=2$ کرښو تر منځ مساحت وټاکئ.

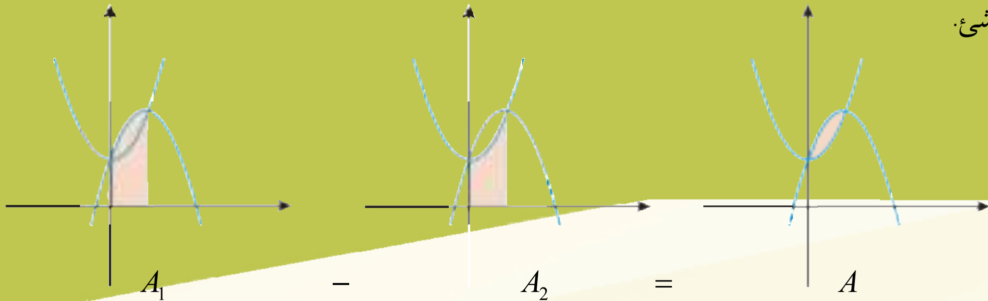



3- د $y=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}+x}$ منحني او د $x=0$ او $x=1$ کرښو تر منځ مساحت حساب کړئ.

## د دوو محصور شويو منحني ګانو تر منځ د مساحت محاسبه

***Accounting of area bounded by tow curves***

لاندې شکلونه په پام کې ونيسئ د $A = A_1 - A_2$ اړيکې د سموالي په اړه څه و يلای شئ.







که د $y_1 = 1 - x^2$ او $y_2 = x^2 - 1$ تابع ګانې راکړل شوی وي.

- د $y_1 = y_2$ رابطې څخه د $x$ قيمت په لاس راوړئ.
- د لاس ته راغلو قيمتونو په پام کې نيولو سره د هغوی ګراف رسم کړئ.
- څرنګه چې د $y_1$ تابع ګراف د $y_2$ تابع د ګراف څخه لوړ دی، نو د تابع ګانو د انتيګرال د تفريق حاصل $(y_1 - y_2)$ د $x$ په ټاکل شوی انټروال کې حساب کړئ.
- نوموړی فعاليت د $y = x^2$ تابع د منحني او $y = x + 2$ د کرښې لپاره تکرار کړئ او د محصورې شوي سطحې مساحت حساب کړئ.

د پورتنی فعاليت څخه لاندې پايلې لاسته راځي:

ـ که چېرې د $y_1 = f(x)$ او $y_2 = g(x)$ دوو منحني‌ګانو د محصور شوي سطحې د محاسبې لپاره په هغه صورت کې چې $f(x) > g(x)$ وي، يعنې د $f(x)$ تابع ګراف د $g(x)$ تابع دپاسه واقع وي، نو لومړی د دواړو منحني ګانو د تقاطع ټکي پيداکوو وروسته د پاسني او لاندېني منحني د $x$ د محور سره مساحت په $[a,b]$ انټروال کې محاسبه کوو:

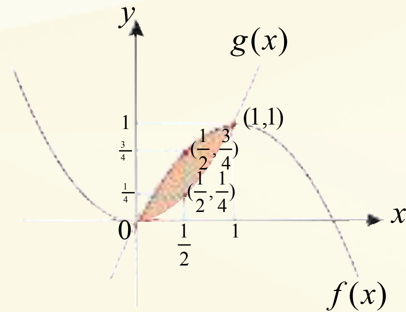
$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx$$

ـ که چېرې د $g(x)$ تابع ګراف د $f(x)$ تابع د ګراف دپاسه واقع وي، نو لرو چې:

$$A=\int_a^b [g(x)-f(x)]\,dx=\int_a^b g(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx$$

**لومړی مثال**: د $f(x)=2x-x^2$ او $g(x)=x^2$ منحني ګانو د ګرافونو ترمنځ د پرتې سطحې مساحت حساب کړئ.

**حل**: لومړی د دواړو منحني ګانو د تقاطع ټکی پیدا کوو:




$$f(x)=2x-x^2 \quad , \quad g(x)=x^2$$
$$f(x)=g(x)\Rightarrow 2x-x^2=x^2$$
$$2x-x^2-x^2=0$$
$$2x-2x^2=0$$
$$2x(1-x)=0$$
$$2x=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=0$$
$$1-x=0 \quad \Rightarrow \quad x_2=1$$

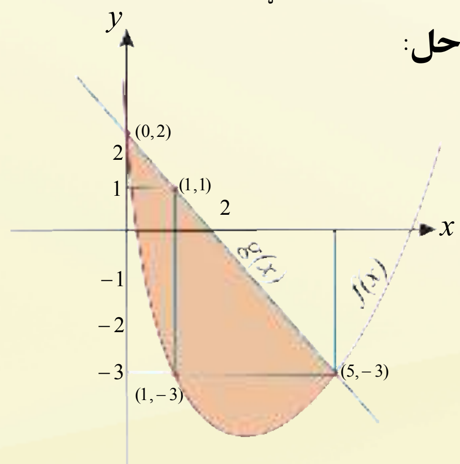
لیدل کېږي چې ددواړو منحني ګانو تقاطع $(1،1)$ او $(0،0)$ ده اوس د محصور شوي سطحې مساحت پیدا کوو.

$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]=\int_0^1 [2x-x^2-x^2]\,dx=\int_0^1 [2x-2x^2]=[\frac{2x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}]_0^1$$

$$=[x^2-\frac{2}{3}x^3]_0^1=(1-\frac{2}{3})-0=\frac{3-2}{3}=\frac{1}{3}$$

**دویم مثال**: د $f(x)=x^2-6x+2$ تابع او $g(x)=2-x$ کرښې د ګرافونو تر منځ د پرتې سطحې مساحت حساب کړئ.

**حل**:




$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2-6x+2 \\ g(x)=2-x \end{array}\right\}\Rightarrow f(x)=g(x)$$

$$x^2-6x+2=2-x\Rightarrow x^2-6x+2-2+x=0$$

$$x^2-5x=0\Rightarrow x(x-5)=0$$

$$x_1=0 \quad , \quad x_2=5$$

$\Rightarrow (0,2) \;,\; (5,-3)$ د کرښې او منحني د تقاطع ټکي

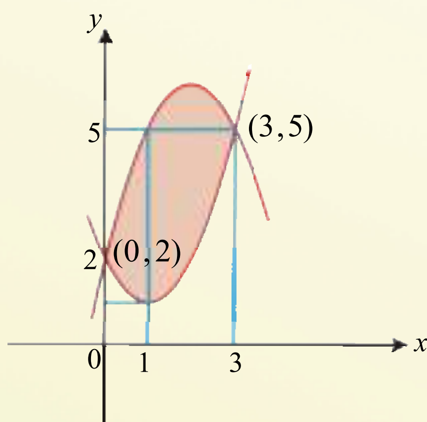
له شکل څخه ښکاري چې د $g(x)$ کرښې گراف د $f(x)$ گراف پورته خوا ته واقع دی، په دې معنا چې

$g(x) > f(x)$

$$A=\int_a^b [g(x)-f(x)]\,dx=\int_0^5 (2-x-x^2+6x-2)dx$$
$$=\int_0^5 (-x-x^2+6x)\,dx=\int_0^5 (-x^2+5x)\,dx$$
$$=[-\frac{x^3}{3}+5\frac{x^2}{2}]_0^5=(-\frac{125}{3}+5\cdot\frac{25}{2})-0=-\frac{125}{3}+\frac{125}{2}$$
$$=\frac{-250+375}{6}=\frac{125}{6}$$

**دریم مثال**: د $f(x)=-x^2+4x+2$ او $g(x)=x^2-2x+2$ تابع گانو د گرافونو تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.

**حل**: څرنگه چې د دواړو گرافونو د تقاطع ټکي د انتیگرال حدونه جوړوي، نو د دې ټکو د پیدا کولو لپاره $f(x)=g(x)$ وضع کوو:




$$\left.\begin{aligned} f(x)&=-x^2+4x+2 \\ g(x)&=x^2-2x+2 \end{aligned}\right\}\Rightarrow f(x)=g(x)$$
$$-x^2+4x+2=x^2-2x+2$$
$$\Rightarrow -x^2+4x+2-x^2+2x-2=0$$
$$-2x^2+6x=0\Rightarrow x(-2x+6)=0$$
$$\Rightarrow x_1=0\quad,\quad -2x=-6\Rightarrow x_2=3$$

**د دواړو منحني گانو د تقاطع ټکي** $(0,2)$ , $(3,5)$

د $x$ له محور سره د تقاطع ټکي عبارت له (3،5)، (0،2) دي اوله شکل څخه لیدل کېږي چې د $f(x)$ گراف د $g(x)$ له گراف څخه پورته واقع دی، نو لرو:

$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx=\int_0^3 (-x^2+4x+2)dx-\int_0^3 (x^2-2x+2)dx$$
$$=[-\frac{x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}+2x]_0^3-[\frac{x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}+2x]_0^3$$
$$=-\frac{1}{3}\cdot 27+2\cdot 9+6-0-\frac{1}{3}\cdot 27+9-6+0$$
$$=-9+18-9+9=9$$



## پوښتنې

1- د $y = x^2$ او $y = -x^2 + 4x$ منحني ګانو د ګرافونو تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.

2- د $y^2 = 2x - 2$ پارابول او $y = x - 5$ کرښې د ګرافونو تر منځ د سطحې مساحت حساب کړئ.

3- د $y^2 = 2x + 6$ منحني او $y = x - 1$ کرښې د ګرافونو تر منځ د سطحې مساحت محاسبه کړئ.

## دګراف له دوران څخه د په لاس راغلي جسم حجم

*Accounting of rounding things Volume*

د مخامخ شکل د جسمونو د حجمونو تر منځ نسبت پیدا کړئ.



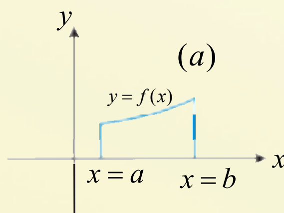
په مخکنیو ټولګیو کې مو د جسمونو حجم پیداکړی وو. پرته له دې چې د هغوی فورمولونه ثبوت شي منلي مو وو، خو اوس د جسمونو د حجم فورمولونه د معین انتیګرال څخه په ګټه اخیستنې سره ثبوتوو.



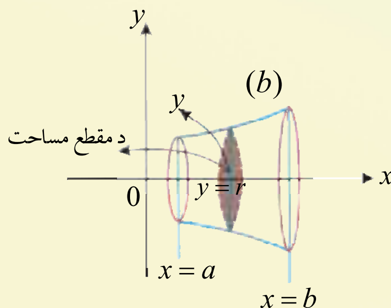

- یو ټکی او یوه کرښه په فضاکې داسې په پام کې ونیسئ چې ټکی د کرښې په منځ کې واقع وي.
- هغه جسم چې د یوې مستقیمې کرښې له دوران څخه د یوه ټکي په شاوخوا لـه خرڅېدو وروسته جوړېږي، نوم یې واخلئ.
- د نوموړي جسم د حجم فورمول ولیکئ او ووایئ چې هغه څنګه ثبوتوو.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

- که چېرې د $y = f(x)$ متمادي تابع د منحني مساحت نظر $(a)$ شکل ته

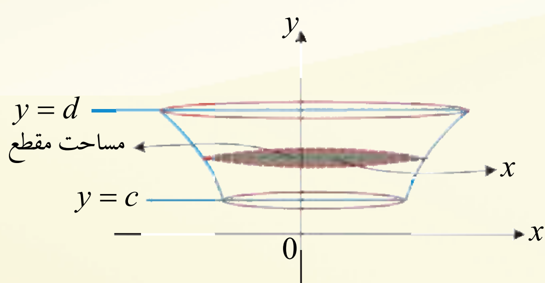



د $x = a$ او $x = b$ کرښو او منحني پـه واسطه محصور شوی وي، نو د هغه جسم حجم چې د پورتني تابع د منحني له دوران څخه د $x$ محور په شاوخوا لاسته راځي تقریباً استوانه یې شکل لري، لکه د $(b)$ شکل.



چې ارتفاع يې $\Delta x = b - a$ ده او د دې استوانې سطح د دايروي شکل په واسطه محصوره شوې ده چې دې سطحو ته مقطع وايي او پوهېږو چې د دايرې مساحت نظر $x$ محور ته $A(x) = \pi r^2$ دی او ددې مقطع شعاع شکل ته په کتو سره د $y$ محور سره موازي ده، نو $y = r$ کېږي او د حجم فورمول يې نظر ريمان مجموع ته په لاندې ډول دی:

$$v = \lim_{n \to \infty} V_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} A(x)\Delta x = \int_a^b \pi r^2 \, dx = \int_a^b \pi y^2 \, dx = \int_a^b \pi [f(x)]^2 \, dx$$




- که د $x = f(y)$ تابع د منحني مساحت $y = c$ او $y = d$ کرښو ترمنځ محصور شوی وي دداسې استوانې د مقطع مساحت نظر $y$ محور ته $A(y) = \pi r^2$ دی چې ارتفاع يې $\Delta y = d - c$ او شعاع يې $x = r$ سره ده هغه حجم چې له دې دوران څخه په لاس راځي په لاندې ډول دی:

$$v = \lim_{n \to \infty} V_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} A(y)\Delta y = \int_a^b \pi r^2 \, dy = \int_a^b \pi x^2 \, dy = \int_a^b \pi [f(y)]^2 \, dy$$

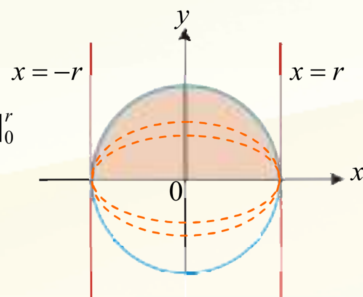
د دوراني جسمونو حجم د انتيگرال په مرسته په لاس راځي، لکه:

1- د انتيگرال په مرسته د کرې حجم پيدا کړئ.

**ثبوت**: پوهېږو چې که چېرې نيمه دايره د خپل قطر په شاوخوا وڅرخي کره لاس ته راځي او د دايرې معادله $x^2 + y^2 = r^2$ ده، اوس د نيمې دايرې حجم له څرخېدو وروسته په لاس راوړو او هغه دوه برابره کوو چې د دايرې بشپړ حجم په لاس راشي

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$y^2 = r^2 - x^2$$

$$V=\int_{-r}^{r}\pi y^2dx=\pi\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)\,dx$$




$$=2\pi\int_{0}^{r}(r^2-x^2)\,dx=2\pi[r^2x-\frac{x^3}{3}]_0^r$$

$$=2\pi[(r^3-\frac{r^3}{3})-0]$$

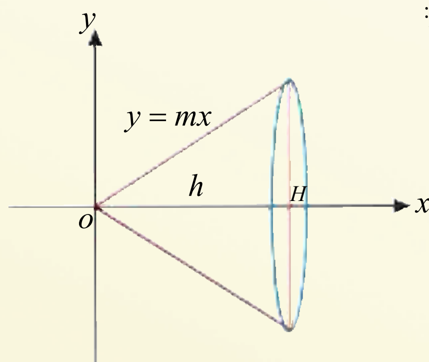
$$=2\pi(\frac{3r^3-r^3}{3})$$

$$=2\pi(\frac{2r^3}{3})$$

$V$ ( دکرې حجم ) $=\frac{4}{3}\pi r^3$

2- د انتيګرال په مرسته د مخروط حجم پيدا کړئ.

**ثبوت**: څرنګه چې مخروطي سطح د $y=mx$ کرښې له دوران څخه د $x$ د محور په چاپيريال په لاس راځي نو:




$$V=\int_0^h\pi\, y^2dx$$

$$=\int_0^h\pi\, m^2x^2dx=\pi\, m^2\int_0^h x^2dx$$

$$=\pi\, m^2[\frac{x^3}{3}]_0^h=\pi\, m^2(\frac{h^3}{3})$$

$$=\frac{\pi\, h}{3}(mh)^2$$

له پورته شکل څخه ليدل کېږي چې د مخروط قاعده دايروي بڼه لري اوشعاع يې د $h$ محور سره موازي ده، يعنې $y\,//\,r$ او همدا رنګه د مخروط ارتفاع $(h)$ د $x$ په محور باندې منطبق ده، $(x=h)$ نو د $y=mx$ په اړيکه کې يې قيمت وضع کوو:

$$y=mx\quad\Rightarrow\quad r=mh$$

$$=\frac{\pi h}{3}\quad r^2$$

$$V=\pi\, r^2\times\frac{h}{3}$$

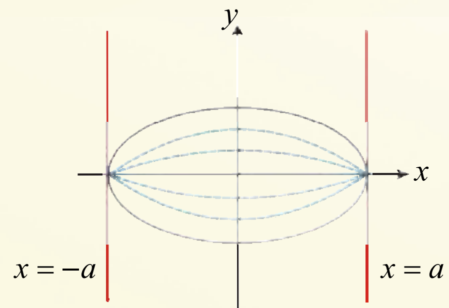
خرنگه چې د مخروط قاعده دايروي ده، د دايرې مساحت $\pi r^2$ دی، لرو چې:

$$V = \pi r^2 \cdot \frac{h}{3}$$

$$V(\text{د مخروط حجم}) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

3- د الپس حجم چې د $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ د منحني او $x$ محور په چاپير د لوی قطر په شاوخوا له دوران وروسته جوړېږي، په لاس راوړئ.

**ثبوت**: د الپس د نيمايي حجم د لوی قطر په شاوخوا په لاس راوړو او هغه دوه چنده کوو چې د بشپړ الپس حجم په لاس راشي.




$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2} \Rightarrow y^2 = b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2$$

$$V=\int_{-a}^{a}\pi y^2\,dx = \pi\int_{-a}^{a}[b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2]dx$$

$$=2\pi\int_{0}^{a}[b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2]dx = 2\pi[b^2x-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x^3}{3}]_0^a$$

$$=2\pi[(b^2a-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{a^3}{3})-0]=2\pi[b^2a-\frac{b^2a}{3}]$$

$$=2\pi[\frac{3b^2a-b^2a}{3}]=2\pi[\frac{2b^2a}{3}]$$

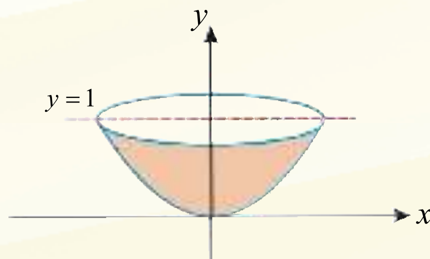
$$\text{V}=\frac{4}{3}\pi b^2 a \Rightarrow \text{د الپس دوران د لوی قطر په شاوخوا حجم} = \frac{4}{3}\pi b^2 a$$

که چېرې د الپس محراقونه د $y$ په محور پراته وي او د هغه انتګرال حساب کړو د الپس د کوچني قطر په شاوخوا حجم په لاندې ډول په لاس راځي:

$$\text{د الپس دوران د کوچني قطر په شاوخوا حجم} = \frac{4}{3}\pi a^2 b$$

**لومړی مثال**: د هغه جسم حجم چې د $y=x^2$ او $y=1$ کرښې تر منځ پرتې مستوي مساحت د دوران څخه د $y$ په محور په لاس راځي، پیدا کړئ.

**حل**: لومړی شکل رسموو وروسته یې مساحت حسابوو:

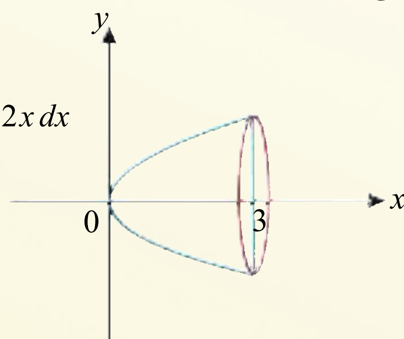



$$V=\int_a^b \pi x^2 dy=\pi\int_0^1 y\,dy=\frac{1}{2}\pi y^2\Big|_0^1=\frac{1}{2}\pi$$

$$\Rightarrow V=\frac{\pi}{2}$$

**دویم مثال**: د $y=\sqrt{2x}$ تابع او $y=3$ کرښې ترمنځ د څرخیدلی جسم مساحت پیدا کړئ.

**حل:**




$$V=\int_a^b \pi y^2 dx=\int_0^3 \pi[\sqrt{2x}\,]^2 dx=\pi\int_0^3[\sqrt{2x}\,]^2 dx=\pi\int_0^3 2x\,dx$$

$$V=2\pi\int_0^3 x\,dx=2\pi[\frac{x^2}{2}]_0^3$$

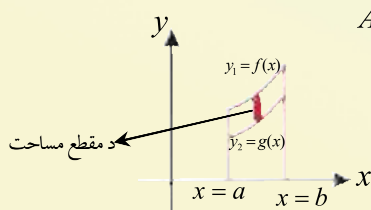
$$V=9\pi$$

**یادونه**: که د $y_1=f(x)$ او $y_2=g(x)$ تابع ګانې په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي د هغه دوراني جسم حجم د $f(x)$ او $g(x)$ منحني ګانو او د $x=a$، $x=b$ کرښو تر منځ جوړېږي له لاندې رابطې څخه لاسته راځي:

$\Delta x=$ د استوانې ارتفاع

$A(x)=$ (د استوانې د مقطع مساحت) $=\pi y_1-\pi y_2=\pi(y_1-y_2)$

د هغې استوانې د حجم فورمول چې د $f(x)$ تابع ګراف د $g(x)$ تابع ګراف څخه پورته قرار لري.



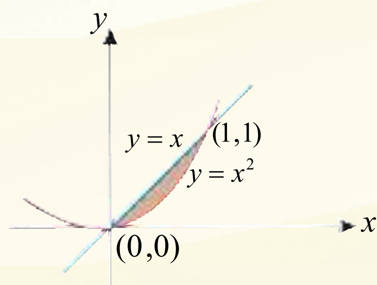

$$V=\int_a^b \pi(y_1^2-y_2^2)\,dx=\pi\int_a^b (y_1^2-y_2^2)\,dx$$

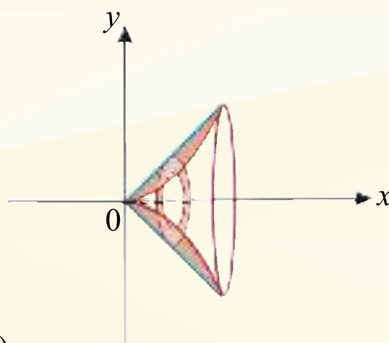
د هغې استواني د حجم فورمول چې د $g(x)$ تابع گراف ، د $f(x)$ گراف څخه پورته واقع وي.

$$V = \int_a^b \pi(y_2^2 - y_1^2)\,dx = \pi\int_a^b (y_2^2 - y_1^2)\,dx$$

**مثال**: د هغه جسم حجم پیدا کړئ چې د $y = x^2$ منحني او $y = x$ کرښې تر منځ د پرتې سطحې مساحت له دوران څخه د $x$ محور په شاوخوا په لاس راځي، محاسبه کړئ.

**حل**:




$$\left.\begin{array}{l} y_1 = x^2 = f(x) \\ y_2 = x = g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow y_2 > y_1 \;,\; g(x) > f(x)$$

$$= \int_a^b \pi(y_2^2 - y_1^2)\,dx = \int_0^1 \pi(x^2 - (x^2)^2)dx$$

$$= \pi\int_0^1 (x^2 - x^4)\,dx = \pi[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}]_0^1$$

$$= \pi[(\frac{1}{3} - 0) - (\frac{1}{5} - 0)] = \pi[\frac{1}{3} - \frac{1}{5}]$$

$$V = \pi[\frac{5-3}{15}] = \pi[\frac{2}{15}] = \frac{2\pi}{15}$$



## پوښتنې

1. د هغه جسم حجم چې د $y = \sin x$ تابع او د $x = 0$ او $x = \pi$ دوو کرښو تر منځ محصور شوي مساحت له دوران څخه د $x$ د محور په چاپېر جوړېږي پیدا کړئ.
2. د هغه جسم حجم پیدا کړئ چې د $y = x^3$ منحني او $y = 8$ ، $x = 0$ کرښو ترمنځ محصور شوي مساحت له دوران څخه د $y$ د محور په چاپېر جوړېږي، حساب کړئ؟

## د قوس د اوږوالی محاسبه

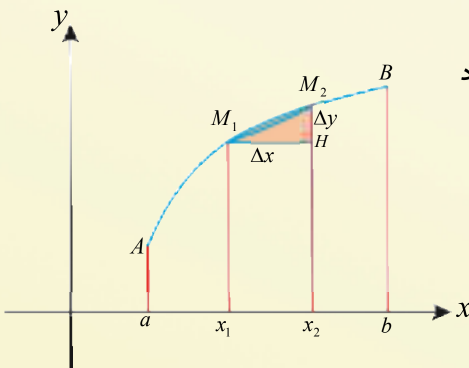
## *Accounting the Length of Arc*

څرنګه کولای شو چی د مخامخ پړي اوږدوالی پیدا کړو؟






- د قایمو مختصاتو په سیستم کې د $y=f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې په پام کې ونیسئ او هغې ته $\overset{\frown}{AB}$ ووایې، داسې چې تابع په نوموړی فاصله کې متمادي او د مشتق وړ وي.
- د $[a,b]$ انټروال په دریو مساوي برخو ویشو او د $x_1$ او $x_2$ د قوس اوږدوالی په $M_1$ او $M_2$ ښیو.
- د $M_1$ له ټکي څخه یوه ټوټه کرښه د $M_2$ په ټکي او یوه بله کرښه، د هغې په مخامخ کرښه رسموو او د دواړو ټوټه کرښو، د تقاطع ټکی $H$ ونوموئ.
- د $M_1H$ د کرښې فاصلې ته $\Delta x$ او $M_2H$ ته $\Delta y$ وایې او د $M_1HM_2$ د قایم الزاویه مثلث د مخامخ قوس اوږوالی د فیثاغورث د قضیې په مرسته حساب کړئ.




له پورتني فعالیت څخه کولای شو چې د $M_1HM_2$ مثلث د مخامخ قوس اوږدوالی داسې ثبوت کړو.

**ثبوت**:

له قایم‌الزاویه $M_1HM_2$ مثلث څخه په ګټې اخیستنې سره لرو چې:

$$(M_1M_2)^2=(\Delta x)^2+(\Delta y)^2$$

$$M_1M_2=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

د مشتق له تعریف څخه پوهېږو:

$$f'(t)=\frac{\Delta x}{\Delta t} \quad , \quad g'(t)=\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$\Delta x=f'(t)\cdot\Delta t \quad , \quad \Delta y=g'(t)\cdot\Delta t$$

$$M_1M_2=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{[f'(t)\cdot\Delta t]^2+[g'(t)\cdot\Delta t]^2}$$

$$M_1M_2=\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\cdot\Delta t$$

نو د ریمان له مجموعې څخه لرو:

$$L=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\cdot\Delta t$$

$$L=\int_a^b\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\,dt$$

**لومړی مثال**: د $x^2+y^2=r^2$ د دایرې محیط محاسبه کړئ:

**حل**: څرنګه چې د دایرې پارامترې معادله په دې ډول $\begin{cases}x=r\cos t\\ y=r\sin t\end{cases}$ ده.

که چېرې $0\le t\le\pi$ وي، نو د دایرې نمایي محیط پیدا کړئ.

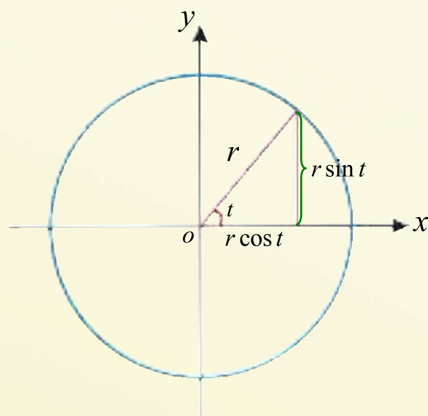
$$P=\int_0^{\pi}\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$$

$$x'=-r\sin t \quad , \quad y'=r\cos t$$

$$P=\int_0^{\pi}\sqrt{(-r\sin t)^2+(r\cos t)^2}\,dt$$

$$P=\int_0^{\pi}\sqrt{r^2\sin^2 t+r^2\cos^2 t}\,dt$$

$$P=\int_0^{\pi}\sqrt{r^2(\sin^2 t+\cos^2 t)}\,dt=\int_0^{\pi}\sqrt{r^2}\,dt$$




د دایرې نیمایي محیط $P=[r\,t]_0^{\pi}=(r\cdot\pi-r\cdot0)=\pi r$

د دایرې مکمل محیط $=2\pi r$

**یادونه**:

1- د $y = f(x)$ منحني معادله په $a \le x \le b$ انټروال کې راکړل شوې ده، د $x$ د پارامتر په پام کې نیولو سره د منحنی د قوس اوږدوالی داسې محاسبه کوو:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^{\,2}(x)}\ dx$$

**مثال**: د $y = f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ منحني د قوس اوږدوالي په $0 \le x \le 4$ فاصله کې حساب کړئ.

**حل**: $f(x) = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\ dx = \int_0^4 \sqrt{1 + (\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}})^2} \cdot dx$$

$$= \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\ dx = \int_0^4 \sqrt{u} \cdot \frac{4}{9} du = \frac{4}{9}\int_0^4 u^{\frac{1}{2}}\, du$$

$$u = 1 + \frac{9}{4}x \qquad du = \frac{9}{4}dx \qquad dx = \frac{4}{9}du$$

$$= \frac{4}{9}\Big[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Big]_0^4 = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3}[u^{\frac{3}{2}}]_0^4 = \frac{8}{27}[\sqrt{u^3}\,]_0^4$$

$$= \frac{8}{27}[\sqrt{(1 + \frac{9}{4}x)^3}\,]_0^4 = \frac{8}{27}[\sqrt{(1 + \frac{9}{4} \cdot 4)^3} - 1] = \frac{8}{27}(\sqrt{10^3} - 1)$$

$$L = \frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1)$$

2- د $x = f(y)$ منحني په $a \le y \le b$ انټروال کې راکړل شوې ده، د $y$ د پارامتر د په پام کې نیولو سره لرو چې:

$$L = \int_a^b \sqrt{f'^2(y) + 1}\ dy$$

**مثال**: د $x = f(y) = y^{\frac{3}{2}}$ منحني د قوس اوږدوالی په $1 \le y \le 4$ انټروال کې حساب کړئ.

**حل:**

$$f(y)=y^{\frac{3}{2}} \quad , \quad f'(y)=\frac{3}{2}\cdot y^{\frac{1}{2}}$$

$$L=\int_a^b\sqrt{f'^2(y)+1}\,dy=\int_1^4\sqrt{(\frac{3}{2}\cdot y^{\frac{1}{2}})^2+1}\,dy$$

$$=\int_1^4\sqrt{\frac{9}{4}y+1}\,dy=\int_1^4\sqrt{u}\cdot\frac{4}{9}du \qquad u=\frac{9}{4}y+1$$

$$=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}[u^{\frac{3}{2}}]_1^4=\frac{8}{27}[\sqrt{(\frac{9}{4}y+1)^3}]_1^4 \qquad du=\frac{9}{4}dy$$

$$=\frac{8}{27}[\sqrt{(10)^3}-\sqrt{(\frac{9}{4}+1)^3}] \qquad dy=\frac{4}{9}du$$

$$=\frac{8}{27}[\sqrt{1000}-\sqrt{(\frac{13}{4})^3}]=\frac{8}{27}[10\sqrt{10}-\sqrt{\frac{2197}{64}}]$$



## پوښتنې

1. د $x=t^2$ او $y=t^3$ د منحنيگانو د قوس اوږدوالی د $1\le x\le 2$ د فاصلې تر منځ پیدا کړئ.

2. د $f(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$ د منحني د قوس اوږدوالی په $0\le x\le 1$ انټروال کې پیدا کړئ.

## د څپرکي مهم ټکي

- د $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ انتیګرال د یوې سطحې د مساحت اندازه یا پراخوالی راښیي چې د $y = f(x)$ منحني او د $x$ د محور او د $x = a$ او $x = b$ کرښو له خوا رابند دی.
- که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې مثبت او متمادي وي، یعنې $y = f(x) \geq 0$ په دې صورت کې د $f(x)$ تابع تل د $x$ د محور پورته خواته او که $y = f(x) \leq 0$ وي، په دې حالت کې د $f(x)$ د $x$ د محور لاندې خواته واقع او انتیګرال یې منفي دی.

**د دوو منحنيګانو په واسطه د محصور شوی سطې د مساحت محاسبه:**

- که چېرې د $f(x)$ تابع د $g(x)$ تابع د ګراف په پورتنی برخه کې واقع وي، نو لرو:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

- که چېرې د $g(x)$ تابع ګراف د $f(x)$ تابع په پاسنی برخه کې واقع وی؛ لرو چې:

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx$$

**دګراف له دوران څخه د په لاس راغلي جسم حجم**

- که چېرې د $y = f(x)$ متمادي تابع مساحت د $x = a$ او $x = b$ کرښو په واسطه محصور شوی وي، نو د هغه جسم حجم چې د پورتني تابع د منحني له دوارن څخه د $x$ محور په شاوخوا لاسته راځي تقریباً استوانه‌یي شکل لري .

چې ارتفاع یې $\Delta x = b - a$ ده او د دې استوانې سطح د دایروي سطحو په واسطه محصوره شوې ده چې دې سطحو ته مقطع وایي او پوهېږو چې د دایرې مساحت نظر د $x$ محور ته $A(x) = \pi r^2$ دی او ددې مقطع شعاع نظر شکل ته د $y$ له محور سره موازي دی؛ نو $y = r$ کېږي او د حجم فورمول یې نظر د ریمان مجموعې ته په لاندې ډول دی:

$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x)\Delta x = \int_a^b \pi r^2\,dx = \int_a^b \pi y^2\,dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx$$

- که د $x = f(y)$ تابع مساحت د $y = c$ ، $y = d$ کرښو ترمنځ محصور شوی وي دداسې استوانې مقطع نظر y محور ته $A(y) = \pi r^2$ چې ارتفاع یې $\Delta x = d - c$ او شعاع یې $x = r$ سره ده هغه حجم چې ددې دوران له مساحت څخه په لاس راځي په لاندې ډول دی:

$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(y)\Delta y = \int_a^b \pi r^2\,dy = \int_a^b \pi x^2\,dy = \pi \int_a^b [f(y)]^2\,dy$$

**د قوس د اوږدوالي محاسبه:**

د قوس د اوږدوالي د محاسبې فورمول: $L=\int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\,dt$

(1 $L=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$

(2 $L=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(y)}\,dy$

## د شپږم څپرکي پوښتنې

1. د $y^2-x-5=0$ منحني او د $y$ د محور تر منځ د پرتې سطحې مساحت محاسبه کړئ.
2. د هغې سطحې مساحت چې د $y=\sin x$ منحني په $[0,2\pi]$ انټروال کې او د $x$ د محور تر منځ پرته ده، پیدا کړئ.
3. د $y=x^2-2x$ او $y=6x-x^2$ منحني ګانو تر منځ د پرتې سطحې مساحت حساب کړئ.
4. د $y=-x^2+4x-3$ منحني او $x$ محور تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.
5. د $y=x^3-6x^2+8x$ او $y=x^2-4x$ منحني ګانو تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.
6. د هغه جسم حجم وټاکئ چې د $y=\sin x-\cos x$ منحني او $x=0$ , $x=\dfrac{\pi}{2}$ کرښو د $x$ محور په شاوخوا له دوران څخه په لاس راځي، حساب کړئ.
7. د هغې سطحې حجم چې د $y=\dfrac{1}{4}x^2+2$ منحني له دوران څخه د $x$ د محور پرشاوخوا په $[0,4]$ انټروال کې جوړ شوي وي.
8. د هغې رابندې شوې سطحې د جسم حجم چې د $y=x^2$ منحني او د $x^2+y^2=2$ دایرې له دوران څخه د $x$ محور په شاوخوا جوړ شوې وي، پیدا کړئ.
9. د هغه جسم حجم چې د $y=\dfrac{1}{2}x+1$ کرښې دوران او د $x$ محور په $[2,6]$ انټروال کې جوړېږي، په لاس راوړئ.
10. د $y=-x+4$ منحني د قوس اوږدوالی په $-2\le x\le 2$ انټروال کې حساب کړئ.
11. د $y=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{4}{3}$ تابع د منحني د قوس اوږدوالی په $2\le x\le 5$ انټروال کې پیدا کړئ.

# اووم څپرکی

# احصائیه

# موږ ټول افغانان یو.







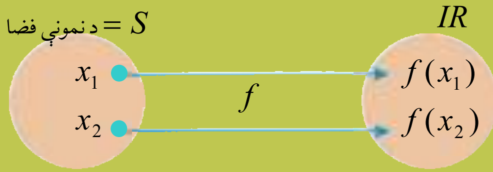







## د احتمال د تابع توزیع

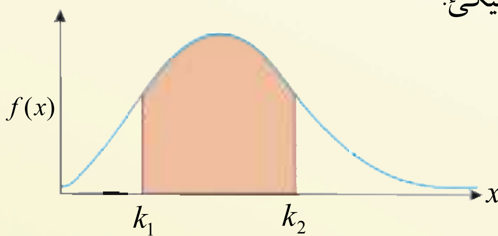
د تـصادفي ازمایـښت، نمونـه‌یي فـضا او د ناڅاپـه متحـول کلمې ستاسو په ذهن کې څه څه را ژوندي کوي.







- هغه تصادفي متحول چې په احصائیه او احتمالاتو کې ترې ګټه اخلي، لـه هغـه متحـول سـره چـې پـه الجبر کې مو لوستي دی، څه توپیر لري؟
- که $x_1 , x_2 ,...x_n$ د یوه سـټ عناصـر او $P(x = x_i) = f(x_i)$ تـابع ولـرو، هغـه مرتبـې جـوړې چـې د نومړې تابع څخه په لاس راځي، جوړې او بیا یې ولیکئ.




- مخـامخ شـکل تـه پـه کتنـې سـره د $k_1$ او $k_2$ مقـدارونو تـرمنځ او $f(x)$ د منحنـي لانـدېنې محـدود شـوی مـساحت د انتیګـرال پـه شـکل وښیئ.

- د لانـدې جـدول پـه پـام کـې نیولـو سـره د $x_i f(x_i)$ , $[E(x = x_i)] = \sum_{i=1}^{2} x_i f(x_i)$ , $[x_i - E(x_i)]^2$ او $[x_i - E(x_i)]^2 \ f(x_i)$ مجموعه په لاس راوړئ.

| $x_i$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $f(x_i)$ | 0.5 | 0.5 |

د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:

ـ هغه تصادفي متحول چې په احصائيه او احتمالاتو کې تر څېړنې لاندې نيول کېږي عبارت له هغې تابع څخه دی چې د تعريف ناحيه يې نمونه‌يي فضا او د قيمتونو ناحيه يې حقيقي اعداد دي.

ـ که $P(x = x_i) = f(x_i)$ ولرو، نو د $[x_1 , f(x_1)] , [x_2 , f(x_2)], ... , [x_n , f(x_n)]$ مرتبو جوړو ته د مجزا(غير متمادي) احتمال تابع وايي.

- د تجمعي او متمادی احتمال تابع کولای شو، په دې بڼه $F(x) = P(X \leq x)$ وښيو.
- که چېرې $f(x)$ د احتمال تابع او $x$ تصادفي متحول وي، په دې صورت کې د دې احتمال چې $x$ د $k_1$ او $k_2$ په منځ کې وي برابر دی له:

$$P(k_1 \leq x \leq k_2) = \int_{k_1}^{k_2} f(x)\, dx$$

- که چېرې $x$ پيوسته ناڅاپه (تصادفي) متحول او $k_1 < k_2$ څخه وي، په دې صورت کې:

$$P(k_1 \leq x \leq k_2) = F(k_2) - F(k_1)$$

- که چېرې $x$ ناڅاپه مجزا متحول وي، په دې حالت کې اوسط (*Expected Value*) د $x$ تصادفي مجزا متحول چې د $E(x)$ په بڼه ښودل کېږي، برابر دی له:

$$E(x) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + ........ + x_n f(x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$$

د $E(x)$ اوسط هم بلل کېږي چې هغه په $\bar{x}$ ښيي همدارنګه که چېرې $x$ غير متمادي تصادفي متحول وي، په دې صورت کې د $x$ وريانس چې په $S^2$ ښودل کېږي برابر دی له:

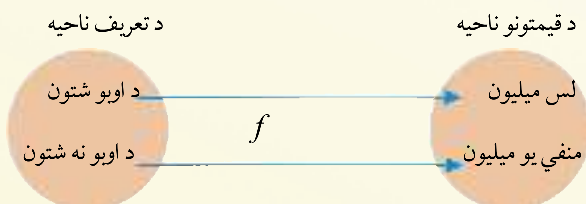
$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[ x_i - E(x_i) \right]^2 f(x_i)$$

**مثال**: یو شخصي شرکت غواړي د یوې غونډۍ پر سر د اوبو یوه څاه وکني، د اوبو څاه په یو میلیون افغانۍ تمامیږي که نوموړې څاه اوبه ورکړي د شرکت مالك لس میلیونه افغانۍ اجوره اخلي، پرته له هغې به د څاه دکېندلو یو میلیون افغانۍ مصرف په زیان ورکړي.

الف_ دا موضوع د یوې تابع په بڼه وښیئ.

ب_ که د دې احتمال چې کیندل شوې څاه اوبه ورکړي $0.2$ او د نه ورکولو احتمال یې $0.8$ وي، په دې صورت کې د احتمال تابع، اوسط $(Expected\ Value)$، وریانس او د $x$ تصادفي متحول معیاري انحراف پیدا کړي.

**د الف حل**:




**د ب حل**:د تصادفي متحول د احتمال تابع اوسط، وریانس او معیاري انحراف په لاندې جدول کې ښودل شوي دي:

| تصادفي متحول | د احتمال تابع | اوسط | د تصادفي متحول د مربعاتو انحراف د تصادفي متحول له اوسط څخه | واریانس | انحراف معیاري |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | $f(x_i)$ | $E(x)=\sum x_i f(x_i)$ | $[x_i-E(x)]^2$ | $S^2=[x_i-E(x)]^2 f(x_i)$ | $S$ |
| $-1$ | $0.8$ | $-1\cdot 0.8=-0.8$ | $(-1-1.2)^2=4.84$ | $4.84\cdot 0.8=3.872$ | $4.4$ |
| $10$ | $0.2$ | $10\cdot 0.2=2$ | $(10-1.2)^2=77.44$ | $77.44\cdot 0.2=15.488$ | |
| | $0.1$ | $1.2$ | | $\sum S^2=19.360$ | |



## پوښتنې

فرض کوو چې د يوه موټر پلورنځي د 100 ورځو خرڅلاو په لاندې ډول دی:

| د ورځو شمېر | 60 | 30 | 8 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| د پېرودل شوو موټرو شمېر | 0 | 1 | 2 | 3 |

د $x$ تصادفي متحول د احتمال تابع او د تجمعي احتمال تابع پيدا کړئ.

د تجمعي احتمال له تابع څخه په ګټه اخېستنې سره ووايئ چې په يوه ورځ کې حداکثر احتمال د (2) موټرونو او حداقل احتمال د دوو موټرونو په کومه کچه ده؟

## د دوه جمله‌يي توزيع او د برنولي ازمويښت



يو ګڼون کوونکي د پوهنتون د کانکور په آزموينه کې له 160 سؤالونو څخه 100 سوالونه حل کړل. تاسې څه سوچ کوئ چې دا ګڼون‌کوونکی په آزموينه کې بريالی کېږي او يا بې نتيجه پاتې کېږي؟

د احتمال دوه جمله‌يي توزيع يوه غيرمتمادي توزيع ده چې د مختلفو پېښو د توصيف لپاره په‌کار وړل کېږي اکثراً پېښې چې په نړۍ کې منځ ته راځي دوه حالتونه لري.




د لاندې آزمويښتي پېښو له شرطونو څخه څه ډول پايلې په لاس راوړلای شئ.

- څو ځلې دوه سکې واچول شي چې سمدلاسه دواړه شېر راشي.
- څو ځلې دوه تاسه واچول شي چې د شمېرو مجموعه يې له 7 څخه کوچنی شي.
- له يوې جعبې څخه څو ځلې د يوې مرۍ (مهره) اخېستل چې د تورو او سپينو مرۍ لرونکي ده.
- له يوې جعبې څخه چې د تورو او سپينو مريو لرونکې ده څو ځلې يوه مرۍ واخېستل شي چې اخېستل شوی مرۍ سپينه وي (چې اخېستل شوي مرۍ بيا په جعبه کې واچول شي)
- که چېرې $m$ بريالیتوب له $n$ آزمايښت څخه ($m < n$) چې ترتيب په کې مهم نه دی دا ټاکنه د څه په نامه يادېږي او فورمول يې وليکئ.
- که د $m$ شکلونو د بریالیتوب احتمال د $n$ ازمايښت څخه په $P$ او $n-m$ شکلونو د ناکامي احتمال د $n$ له آزمايښت څخه په $q$ وښودل شي، نو د $m$ له کاميابي احتمال د آزمايښت د $n$ له شکلونو څخه به څو وي؟
- زده‌کوونکي له پنځو څلور ځوابه آزموينې له پوښتنو سره مخامخ کېږي. هغوی په ناڅاپه ډول پوښتنو ته ځوابونه ورکوي، فرض کړئ که د (سم ځواب) بریالیتوب په $T$ او (ناسم ځواب) نه بریالیتوب د $F$ په توری وښودل شي په دې صورت کې د هر يوه سم او ناسم ځواب احتمال به څومره وي؟

له پورتني فعاليت څخه څرګندېږي چې د برنولي آزمايښت يو ناڅاپه ازمايښت دی چې کولای شو پايله يې په دوو حالتونو بريالیتوب او نابريالیتوب دسته بندي کړو.

د برنولي توزيع کولای شو چې په $P(x=m)=P^m(1-P)^{1-m}=P^m\cdot q^{1-m}$ په بڼه وښيو په داسې حال کې چې $P$ د برياليتوب احتمال او $q=1-p$ د نابرياليتوب احتمال دی.

که چېرې يو ازمايښت $n$ ځلې تکرار کړو، يو ترادف په لاس راځي، داسې چې که د هر آزمايښت د برياليتوب احتمال $P$ او نابرياليتوب احتمال $q$ وي، په دې صورت کې د $n$ ځلې آزمايښت څخه د $m$ ځلې برياليتوب احتمال عبارت دی له: $0\le m\le n$ $\qquad P(X\le m)=\binom{n}{m}P^m q^{n-m}$

پورتنۍ اړيکه کولای شو چې په دې ډول $B(m,n,p)$ هم وښيو.

د پورتني فورمول په پام کې نيولو سره کولای شو، د دوه جمله‌يي د توزيع اوسط په $\bar{x}=np$ او د دوی د توزيع معياري انحراف د $S=\sqrt{n\,p\,q}$ په بڼه وښيو.

**مثال**: د يوه ناروغ د ښه کېدو احتمال د شکري له ناروغۍ څخه $0.4$ دی، که چېرې $15$ تنه په دې ناروغۍ اخته وي، ددې ځومره احتمال شته چې پنځه تنه ښه شي او همدا شان پيدا کړئ چې له $3$ څخه تر $4$ تنو پورې جوړ شي.

**حل**: څرنګه چې $n=15$ , $m=5$ , $q=0.6$ , $P=0.4$ دی نو:

$$P(m=5)=\binom{n}{m}P^m\cdot q^{n-m}=\binom{15}{5}(0.4)^5(0.6)^{10}$$

$$=\frac{15!}{5!(15-5)!}\cdot 0.01024\cdot 0.00604661760=\frac{360360}{120}\cdot 0.00006191$$

$$=\frac{22.3098876}{120}=0.1859$$

$$P(3\le m\le 4)=\sum_{i=3}^{4}\binom{15}{i}(0.4)^i(0.6)^{15-i}=(3^{15})(0.4)^3(0.6)^{15-3}+(4^{15})(0.4)^4(0.6)^{15-4}$$

$$=\frac{15!}{3!(15-3)!}(0.064)(0.6)^{12}+\frac{15!}{4!(15-4)!}(0.0256)(0.6)^{11}$$

$$=\frac{2730}{6}(0.000139264)+\frac{3270}{24}(0.0000928512)$$

$$=\frac{0.38019072}{6}+\frac{0.3036}{24}=0.063365+0.012650$$

$$P(3\le m\le 4)=0.076015$$



**پوښتنې**

په يوه کلي کې $200$ کورنۍ اوسېږي که هره کورنۍ $4$ ماشومان ولري ددې احتمال پيدا کړئ چې هره کورنۍ

- حد اقل يو زوی لري.
- يوازې دوه زامن لري.
- يوه يا دوې لوڼې ولري.

## د پواسن د احتمال توزیع

که چېرې د برنولي دوه جملهيي توزيع فورمول په پام کې ونيسو، ايا ويلاي شئ که چېرې د برنولي په دوه جملهيي توزيع کې د $P$ قيمت صفر ته تقرب وکړي او د $n$ قيمت لايتناهي ته تقرب وکړي، نو د برنولي دوه جملهيي توزيع څه سره مساوي کېږي.

$$1)\ b(x,n,p)=\binom{x}{n}p^{x}q^{n-x}$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty}b(x,n,p)=\frac{\lambda^{x}\cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

$$3)\ P(x,\lambda)=\frac{\lambda^{x}\cdot e^{-\lambda}}{x!}$$




که $n=5$, $p=0.1$ او $m=2$ وي د $P(x=m)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{m}}{m!}$ قيمتونه په داسې حال کې چې $\lambda=np$ وي محاسبه کړئ او د پاسنيو توابعو له قيمتونو سره يې پرتله $P(X=m)=\binom{n}{m}P^{m}q^{n-m}$ او کړئ، ويلای شئ چې د کوم فورمول په کار وړل، ساده دی؟

د پواسن فورمول کولای شي چې د $m$ شکلونو د کاميابۍ احتمال د $n$ آزمايښتونو څخه کله چې $n$ لوی او د کاميابي احتمال $P$ کوچنی وي، د تقريبي محاسبې لپاره کارول کېږي.

دا فورمول عبارت دی له: $P(X=m)=\frac{e^{-x}\lambda^{m}}{m!}$

چې $\lambda=np$ او $e=2.71828$ دی.

په ياد ولرئ چې د پواسن په توزيع کې اوسط او هم وريانس له $\lambda$ سره برابر دی.

**مثال**: 200 تنو مسافرينو د يوې الوتکې ټکټ اخيستلی دی د مخکنيو تجاربو په اساس که د هغه مسافرينو چې ټکټ يې رانيولی دی د نه راتګ احتمال 0.01 وي. ددې احتمال چې 3 تنه مسافرين بېرته را نه شي څومره دی.

**حل**: په دې مسئله کې د(نه راتلل) کاميابي ده او همدارنګه ليدل کېږي چې $n=200$ ډېر لوی او $P=0.01$ يعنې د کاميابی احتمال کوچنی دی، نو لرو:

$$P(X=m)=\frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{m}}{m!} \qquad \lambda=n\,p=200\cdot 0.01=2$$

$$P(3)=\frac{(2.71828)^{-2}\cdot 2^{3}}{3!}=\frac{\frac{1}{(2.71828)^{2}}\cdot 8}{6}=\frac{\frac{1}{7.3890461584}\cdot 8}{6}$$

$$=\frac{0.13533\cdot 8}{6}=\frac{1.08268}{6}=0.1804$$

اوس که چېرې دا احتمال د دو جملهيي په فورمول محاسبه کړو،لرو چې:

$$P(X=m)=\binom{n}{m}P^{m}\;q^{n-m}$$

$$\left.\begin{array}{l} n=200 \\ p=0.01 \end{array}\right\} \Rightarrow q=0.99$$

$$P(3)=P(X=3)=\binom{200}{3}(0.01)^{3}(0.099)^{200-3}$$

$$=\frac{200!}{3!\cdot 197!}(0.01)^{3}(0.099)^{197}=0.1814$$

څرنګه چې ليدل کېږي دواړه ځوابونه سره معادل دي، نو واضح ده چې د پواسن د فورمول له لارې احتمال محاسبه ساده ده.

**یادونه**:

د پواسن د فورمول په واسطه کولای شو چې په یوه ټاکلي وخت کې د ورتللو د شمېر احتمال په لاندې ډول وښیو:

$$P(X=m)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{m}}{m!}$$

په پورتني فورمول کې $t$ د ښودل شوی وخت نسبت پر ټول وخت چې اوسط هغې ته ورکړل شـوی وي $m$ د ورتللو شمېر د $t$ په واحد وخت کې د $\lambda$ د ورتګ شمېر اوسط په واحد د وخت کې دی.

**مثال**: که په یوه ساعت کې د یوه بانک د مراجعینو شمېر په متوسـط ډول 60 تنـه وي، ددې احتمـال چې څلور تنه په لومړیو دریو دقیقو کې راغلی وي، څومره دی.

**حل**:

$$\lambda=60 \quad , \quad t=\frac{3}{60}=\frac{1}{20}$$

$$m=4 \quad , \quad \lambda t=60\cdot\frac{1}{20}=3$$

$$P(m=4)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{m}}{m!}=\frac{e^{-3}(3)^{4}}{4!}=\frac{(2.71828)^{-3}(3)^{4}}{4!}=\frac{\frac{1}{(2.71828)^{3}}\cdot 81}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

$$=\frac{\frac{1}{20.0854}\cdot 81}{24}=\frac{4.03278}{24}=0.168032$$



## پوښتنې

د چاپ د یوه ماشین د جوړولو لپاره په یوه کال کې په متوسط ډول ورتګ دوه ځلې ده، فرض کوو چې د پواسن توزیع په دې اړه صدق کوي.

**الف**: د ماشین د جوړولو لپاره د ورتګ د احتمال توزیع په یوه کال کې حساب کړئ.

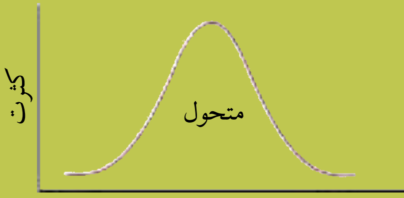
**ب**: د توزیع اوسط او معیاري انحراف څومره دی؟

**ج**: فرض کړئ که د هر ورتګ مصرف 100 افغانۍ وي، د هر ماشین د جوړولو مصرف پیدا کړئ؟

**د**: ددې احتمال چې په هر کال کې دیوه ماشین د جوړولو مصرف له 300 افغانیو څخه زیات وي، څومره دی؟

## د نورمال توزیع

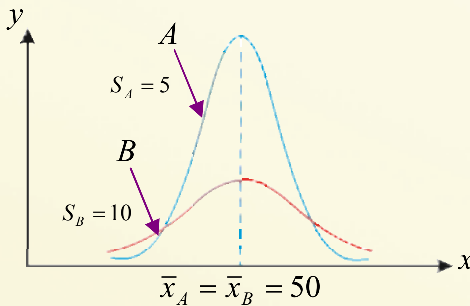
پوهېږو چې د نورمالي منحني شکل مشابه او متناظر لـه زانګولی سره ده، په نورماله منحني کې د پراګندګی مرکزي شاخصونه(معیاري انحراف او اوسط) څه ډول ځایونه(موقعیتونه) نیولی شي.



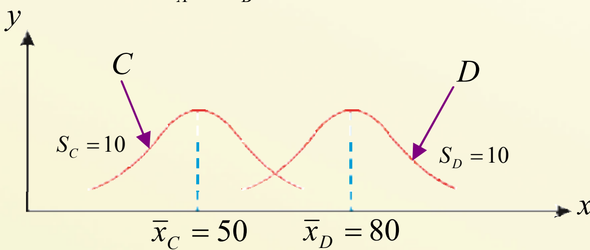




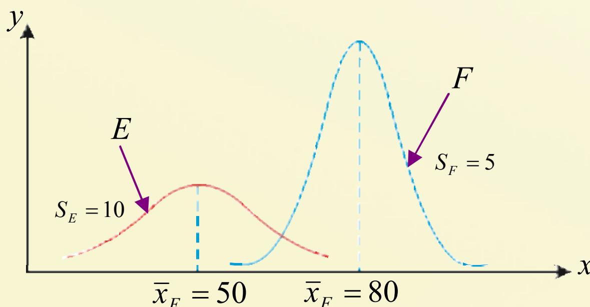
څو نورمالې توزیع ګانې له بېلابېلو سطحو او معیاري انحرافونو سره په لاندې شکلونو کې ورکړل شوي دي.




الف شکل




ب شکل




ج شکل

لاندیني فعالیت له پورتنیو شکلونو څخه په ګټه اخېستنې سره په شفاهي ډول بیان کړئ؟

- د الف په شکل کې د $A$ او $B$ د تصادفي متحول توزیع د څه ډول معیاري انحراف او اوسط لرونکې ده؟
- د ب په شکل کې $C$ او $D$ توزیع د څه ډول معیاري انحراف او اوسط لرونکی دی؟
- د ج په شکل کې د $E$ او $F$ توزیع د څه ډول معیاري انحراف اوسط لرونکی دی؟
- د نورمال منحني شکل دواړو خواوو ته ترکوم ځایه غزیدلی دی؟

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه داسې پایله په لاس راځي چې:

د نورمال منحني توزیع کېدای شي چې په څلورو طریقو یو له بل سره توپیر ولري. د نورمال توزیع ریاضیکي معادله چې د $f(x)$ احتمال توزیع تابع ښودونکی ده، په لاندې ډول ښوول کېږي.

$$f(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\bar{x}}{s})^2}$$

او یا

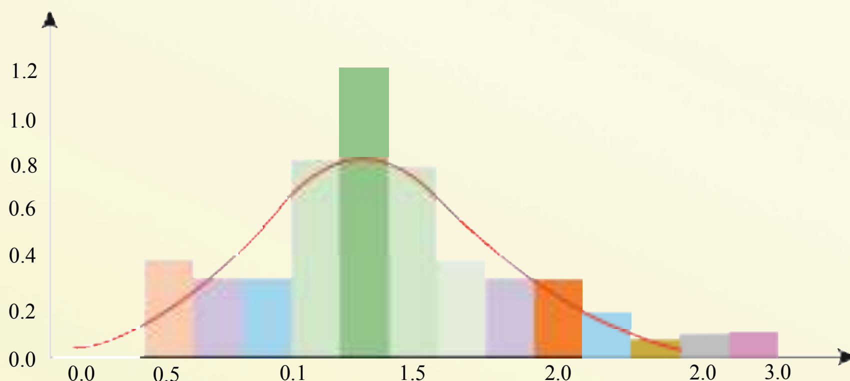
$$f(x) = N(x, \bar{x}, s)$$

په داسې حال کې چې $e = 2.71828$ او $\pi$ هم ثابت عدد 3.14189 دی $\bar{x}$ اوسط، $s$ معیاري انحراف، $x$ متمادی تصادفي مقدار او $f(x)$ د منحني جګوالی راښیي.

د نورمالې توزیع له متمادی توزیعګانو څخه ده. د نورمالي توزیع په واسطه کولای شو، د اندازه کولو توپیر په ښه توګه سره نژدې کړو.

**مثال**: د موټرونو ماشين د تيلو سوزولو په وخت کې يوه اندازه مضر لوګی توليدوي، د هغه مضر لوګي مقدار چې له 46 موټرونو توليدېږي، د يوه تن په واسطه چې لورنزن نومېده په 1980 کال کې وڅېړل شو.يوه اندازه لوګی د نايتروجن اوکسايدونه لري. لاندې مستطيلي ګراف د نايتروجن اوکسايد ميزان د 46 موټرونو د نورمال احتمال توزيع اوسط او وريانس چې د نوموړی کس له خوا تر څېړنې $(\frac{gr}{mil})$ د لاندې نيول شوی. ددې مستطيلي ګراف د ستونونو مساحت متناسب دی له هغو 46 نمونه‌يي شمېر له اندازه‌ګيري سره چې ددې ستون د افقي ټکو تر منځ قرار لري.

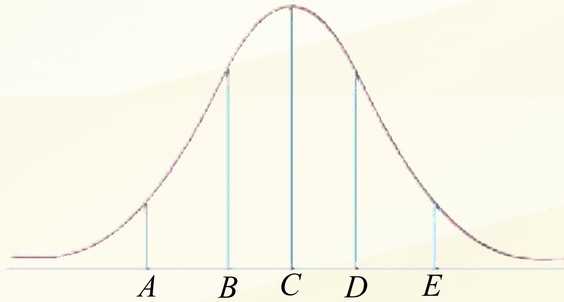
د مثال په ډول په خلورم ستون کې(چې له 1 څخه تر 1.2 پورې په افقي محور قرار لري) د $0.870 \cdot 0.2 = 0.174$ مساحت لرونکی دی چې د $\frac{4}{46}$ سره برابر دی، ځکه 8 ديتا له 1 څخه تر 1.2 پورې پراته دي.





## پوښتنه

لاندېنی شکل په پام کې ونیسئ د $A, B, C, D$ او $E$ ټکو موقعیت د معیاري انحراف د اوسط له جنسه پیدا کړئ.

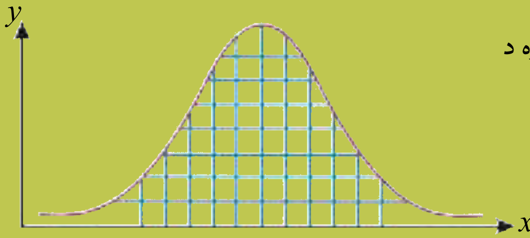


## د نورمال توزیع منحني لاندې مساحت او د هغې سټنډرډ کول

مخامخ شکل په پام کې ونیسئ:

د $y = f(x)$ د منحني لاندې مساحت د محاسبې لپاره د

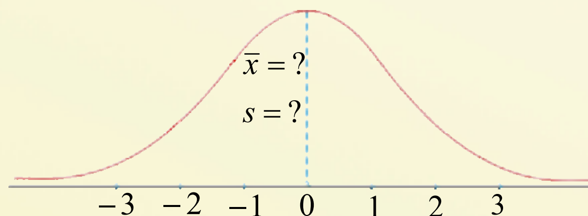
څه ډول لارو ورانديز کوئ.



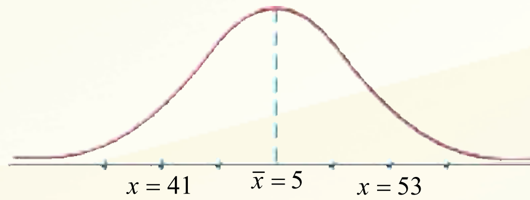




- که چېرې د $x$ تصادفي متمادي متحول د احتمال نورمال توزیع چې اوسط یې $\overline{x}$ او معیاري انحراف یې $s$ وي، ددې احتمال چې دا تصادفي متحول د $x_1$ او $x_2$ تر منځ کمیت غوره کړي د انتیګرال په بڼه یې ولیکئ.
- سوچ کولای شئ چې د احتمال نورمال توزیع د ریاضي شکل انتیګرال محاسبه به ساده کار وي.
- که چېرې د نورمال تصادفي متحول په $z = \dfrac{x - \overline{x}}{s}$ ډول ولیکو، د $f(x)$ د احتمال توزیع تابع له څه سره برابره ده؟
- ویلای شئ چې اوسط او معیاري انحراف په لاندې شکل کې له کومو عددونو سره برابر دي؟



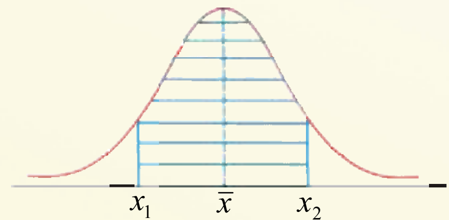
- که په لاندې شکل کې چې د $x = 41$ او $x = 53$ قیمتونه په نورمال ډول د $\bar{x} = 50$ اوسط او $S = 5$ معیار انحراف ښودل شوی دی، نو د $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$ مقدار په لاس راوړئ.




له پورتني فعالیت څخه دا پایله په لاس راځي چې د احتمال د محاسبې لپاره داسې چې د $x$ د پیوسته تصادفي متحول د $x_1$ او $x_2$ تر منځ یو کمیت ونیسئ، نو باید د $x$ د احتمال د توزیع له تابع څخه انتګرال ونیسو او د منحنې لاندې سطحه د $x_1$ او $x_2$ فاصلو ترمنځ په لاندې ډول محاسبه کړو:

$$f(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\bar{x}}{s})^2}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} N(x, \bar{x}, s)dx$$




د نورمال توزیع احتمال محاسبه ساده کار نه دی، د نورمال توزیع‌ګانو د منحنی لاندې مساحت محاسبه اوږدو جدولونو ته اړتیا لري چې عملاً دا کار ګران دی، کولای شو چې د جدول د جوړولو شکل د احصائیوي data د سټنډرډ کولو په واسطه حل کړو.

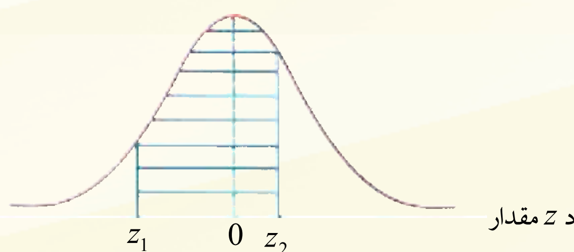
په دې معنا چې کولای شو په $x$ پورې اړوند تصادفي متحول چې د نورمال توزیع لرونکی دی، د لاندې اړیکې په واسطه سټنډرډ کړو.

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

دلته $z$ د سټنډرډ نورمال متحول په نامه او منحني ته د سټنډرډ نورمال منحني په نامه یا د نورمال احتمال منحني نومول کېږي، په یاد ولرئ چې د $z$ سټنډرډ وي، متحول تل د صفر اوسط لرونکی او یو معیار انحراف یې دی، همدرانګه د نورمال منحني او افقي محور ترمنځ مساحت له ټاکل شوي واحد سره برابر وي.

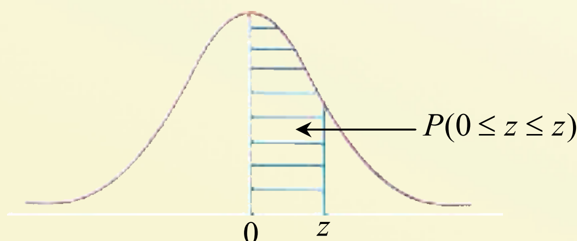
لاندې مساحت د یوه منحني یوه برخه د نورمال احتمال چې له احتمال سره مستقیم تناسب لري او کولای شو چې د $z=\frac{x-\bar{x}}{s}$ بدلولو سره یې په لاندې ډول وښیو.

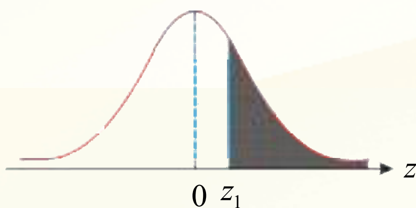
$$f(z_1<z<z_2)=\int_{z_1}^{z_2}\frac{1}{s\sqrt{2\pi}}\,e^{\frac{-z^2}{2}}dz=\int_{z_1}^{z_2}N(z,0,1)\,dz$$




د $x$ متحول منحني لاندې مساحت چې د $x=x_1$ او $x=x_2$ ترمنځ واقع دی، د $z$ متحول له منحني مساحت سره چې د $z=z_1$ او $z=z_2$ ترمنځ پراته مساوي دي. په پایله کې کولای شو چې د نورمال د توزیع سټنډرډ د جدول په لرلو سره د نورمال توزیع احتمال د ناڅاپه متحول د هر ممکنه قیمت لپاره په لاس راوړای شو.

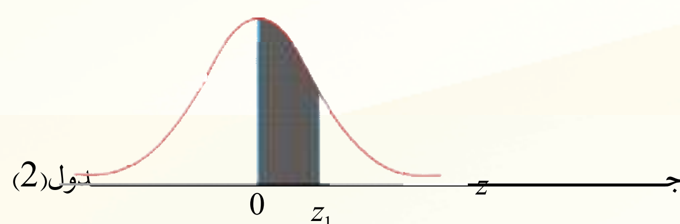
د سټنډرډ نورمال د توزیع احتمال د جدول د استعمال له لارې کولای شو، په لنډ ډول توضیح کړو. هغه جدول چې ددې لوست په پای کې راغلی دی، د سټنډرډ نورمال توزیع اړوند په احتمالاتو کې ګډون لري.
لاندې جدول ددې لوست یوه برخه د جدول پای راښیي، هغه ارقام چې د جدول دپاسه لیکل شوی دی، راښیي چې $z$ د مثبتو مقدارونو لپاره تنظیم شوی دی چې د منحني لاندې مساحت له صفر ټکي څخه تر $z$ پورې راښیي.






جدول(1)

| z | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9278 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9268 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |
| 3.1 | 0.9990 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9993 | 0.9993 |
| 3.2 | 0.9993 | 0.9993 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 |
| 3.3 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9997 |




| Z | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.0000 | 0.0040 | 0.0080 | 0.0120 | 0.0160 | 0.0199 | 00239 | 0.0279 | 00311 | 0.0359 |
| 0.1 | 0.0398 | 0.0438 | 0.0478 | 0.0517 | 0.0557 | 0.0596 | 0.0636 | 0.0675 | 0.0714 | 0.0754 |
| 0.2 | 0.0793 | 0.0832 | 0.0871 | 0.0910 | 0.0948 | 0.0987 | 0.1026 | 0.1064 | 0.1103 | 0.1141 |
| 0.3 | 0.1179 | 0.1217 | 0.1255 | 0.1293 | 0.1331 | 0.1368 | 0.1406 | 0.1443 | 0.1480 | 0.1517 |
| 0.4 | 0.1554 | 0.1591 | 0.1628 | 0.1664 | 0.1700 | 0.1736 | 0.1772 | 0.1808 | 0.1844 | 0.1879 |
| 0.5 | 0.1915 | 0.1950 | 0.1985 | 0.2019 | 0.2054 | 0.2088 | 0.2123 | 0.2157 | 0.2190 | 0.2236 |
| 0.6 | 0.2258 | 0.2291 | 0.2324 | 0.2357 | 0.2389 | 0.2422 | 0.2454 | 0.2434 | 0.2406 | 0.2549 |
| 0.7 | 0.2580 | 0.2612 | 0.2642 | 0.2673 | 0.2704 | 0.2734 | 0.2764 | 0.2794 | 0.2823 | 0.2852 |
| 0.8 | 0.2881 | 0.2910 | 0.2939 | 0.2967 | 0.2996 | 0.3023 | 0.3051 | 0.3078 | 0.3106 | 0.3133 |
| 0.9 | 0.3159 | 0.3186 | 0.3212 | 0.3238 | 0.3264 | 0.3289 | 0.3315 | 0.3340 | 0.3365 | 0.3389 |
| 1.0 | 0.3413 | 0.3438 | 0.3461 | 0.3485 | 0.3508 | 0.3531 | 0.3554 | 0.3577 | 0.3599 | 0.3621 |
| 1.1 | 0.3643 | 0.3665 | 0.3686 | 0.3708 | 0.3729 | 0.3749 | 0.3770 | 0.3790 | 0.3810 | 0.3830 |
| 1.2 | 0.3849 | 0.3869 | 0.3888 | 0.3907 | 0.3925 | 0.3944 | 0.3962 | 0.3980 | 0.3997 | 0.4015 |
| 1.3 | 0.4032 | 0.4049 | 0.4066 | 0.4082 | 0.4099 | 0.4115 | 0.4131 | 0.4147 | 0.4162 | 0.4177 |
| 1.4 | 0.4192 | 0.4207 | 0.4222 | 0.4236 | 0.4251 | 0.4265 | 0.4279 | 0.4292 | 0.4306 | 0.4319 |
| 1.5 | 0.4332 | 0.4345 | 0.4357 | 0.4370 | 0.4382 | 0.4394 | 0.4406 | 0.4418 | 0.4429 | 0.4441 |
| 1.6 | 0.4452 | 0.4463 | 0.4474 | 0.4484 | 0.4495 | 0.4505 | 0.4515 | 0.4525 | 0.4535 | 0.4545 |
| 1.7 | 0.4554 | 0.4564 | 0.4573 | 0.4582 | 0.4591 | 0.4599 | 0.4608 | 0.4616 | 0.4625 | 0.4633 |
| 1.8 | 0.4641 | 0.4649 | 0.4656 | 0.4664 | 0.4671 | 0.4678 | 0.4686 | 0.4693 | 0.4699 | 0.4706 |
| 1.9 | 0.4713 | 0.4719 | 0.4727 | 0.4732 | 0.4738 | 0.4744 | 0.4750 | 0.4756 | 0.4761 | 0.4767 |
| 2.0 | 0.4772 | 0.4778 | 0.4783 | 0.4788 | 0.4793 | 0.4798 | 0.4803 | 0.4808 | 0.4812 | 0.4817 |
| 2.1 | 0.4821 | 0.4826 | 0.4830 | 0.4834 | 0.4838 | 0.4842 | 0.4846 | 0.4850 | 0.4854 | 0.4857 |
| 2.2 | 0.4861 | 0.4864 | 0.4868 | 0.4871 | 0.4875 | 0.4878 | 0.4881 | 0.4884 | 0.4887 | 0.4890 |
| 2.3 | 0.4893 | 0.4896 | 0.4898 | 0.4901 | 0.4904 | 0.4906 | 0.4909 | 0.4911 | 0.4913 | 0.4916 |
| 2.4 | 0.4918 | 0.4920 | 0.4922 | 0.4925 | 0.4927 | 0.4929 | 0.4931 | 0.4932 | 0.4934 | 0.4936 |
| 2.5 | 0.4938 | 0.4940 | 0.4941 | 0.4943 | 0.4945 | 0.4946 | 0.4948 | 0.4949 | 0.4951 | 0.4952 |
| 2.6 | 0.4953 | 0.4955 | 0/4956 | 0.4957 | 0.4959 | 0.4960 | 0.4961 | 0.4962 | 0.4963 | 0.4964 |
| 2.7 | 0.4965 | 0.4966 | 0.4967 | 0.4968 | 0.4969 | 0.4970 | 0.4971 | 0.4972 | 0.4973 | 0.4974 |
| 2.8 | 0.4974 | 0.4975 | 0.4976 | 0.4977 | 0.4977 | 0.4978 | 0.4979 | 0.4979 | 0.4980 | 0.4981 |
| 2.9 | 0.4981 | 0.4982 | 0.4982 | 0.4983 | 0.4984 | 0.4984 | 0.4985 | 0.4985 | 0.4986 | 0.4986 |
| 3.0 | 0.4987 | 04987 | 0.4987 | 0.4988 | 0.4988 | 0.4989 | 0.4989 | 0.4989 | 0.4990 | 0.4990 |
| 3.1 | 0.4990 | 0.4991 | 0.4991 | 0.4991 | 0.4992 | 0.4992 | 0.4992 | 0.4992 | 0.4993 | 0.4993 |
| 3.2 | 0.4993 | 0.4993 | 0.4994 | 0.4994 | 0.4994 | 0.4994 | 0.4994 | 0.4995 | 0.4995 | 0.4995 |
| 3.3 | 0.4995 | 0.4995 | 0.4995 | 0.4996 | 0.4996 | 0.4996 | 0.4995 | 0.4996 | 0.4996 | 0.4997 |
| 3.4 | 0.4997 | 0.4997 | 0.4997 | 0.4997 | 0.4997 | 0.4997 | 0.4997 | 0.4997 | 0.4997 | 0.4998 |
| 3.5 | 0.4998 | 0.4998 | 0.4998 | 0.4998 | 0.4998 | 0.4998 | 0.4998 | 0.4998 | 0.4998 | 0.4998 |
| 3.6 | 0.4098 | 0.4998 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 |
| 3.7 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 |
| 3.8 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 |
| 3.9 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 |

د مثال په ډول که چېرې $z=1.56$ وي لومړی هغه سطر پیدا کړئ چې په هغه کې $z$ د 1.5 معادل دی، که چېرې ددې کرښې په اوږدوالي پرمخ لاړ شو، تر څو هغه ستون ته ورسېږي چې له پاسه 0.06 لیکل شوی دی له 0.9406 عدد سره مخامخ کېږو چې د منحني د لاندې اړوندې سطحې له $z=0$ څخه تر $z=1.56$ پورې دی، نو لیکلای شو چې: $P(0 \le Z \le 1.56) = 0.9406$

**لومړی مثال**: د ښنبلو(نوشابې) د بوتلونو د ډکولو دستگاه داسې تنظیم شوې ده، که 952 ملي‌لیتر نوشابه په بوتل کې واچوي ددې نوشابې میزان چې د نورمال توزیع اوسط یې 952 ملي‌لیتره او معیاري انحراف یې 4 ملي‌لیتره دی. ددې احتمال چې بوتل د 952 او 956 ملي‌لیترو ترمنځ نوشابه ولري، څومره دی.

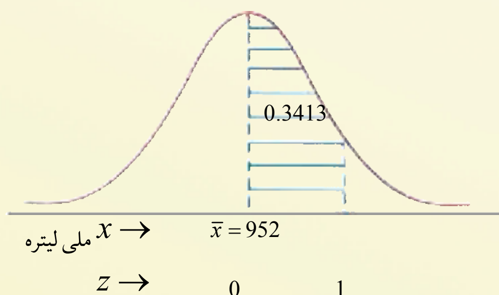
**حل**: لومړی $z$ د $x$ له جنسه پیداکوو:

$$z_1 = \frac{x-\bar{x}}{s} = \frac{952-952}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

$$z_2 = \frac{956-952}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

نو پر دې اساس د $x$ د تعریف ناحیه له 952 څخه تر 956 د $z$ تعریف د ناحیې له صفر څخه تر 1 بدلېږي.

د لوست د پېل له جدول(2) څخه په گټه اخېستنې سره لرو $P(0 \le z \le 1) = 0.3413$ احتمال داسې دی چې هغه بوتل چې له 952 څخه تر 956 ملي‌لیترو نوشابه ولري، یا په بل عبارت 34.13 فیصده ډک شوي بوتلونه له 952 څخه تر 956 ملي‌لیتره نوشابه لري؛ یعنې:




$$\begin{aligned} P(0 \le z \le 1) &= P(z_2) - P(z_1) \\ &= P(1) - P(0) \\ &= 0.3413 - 0 \\ &= 0.3413 \end{aligned}$$

**دویم مثال**: په یوه خاص مضمون کې د زده‌کوونکو د نمبرو د نورمال توزیع اوسط 70 او معیاري انحراف یې 8 دی له نورمال ستنډرډ جدول څخه په گټه اخېستنې سره له 54 څخه تر 84 نمبرو ترمنځ فیصدي پیدا کړئ.

**حل**: د مسألې حل په لاندې ډول په ترسیمي بڼه ښودل شوی دی.

د $x = 54$ لپاره لرو: $z_1 = \frac{54-70}{8} = -2$

د $x = 84$ لپاره لرو: $z_2 = \frac{84-70}{8} = 1.75$

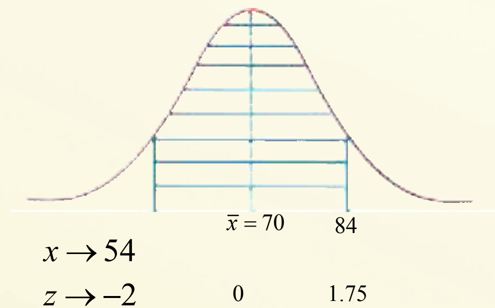
څرنګه چې د ستنډرډ نورمال منحني لاندې مساحت په یو محدود انټروال کې په پام کې نیول شوی دی، نو له نورمال ستنډرډ جدول(2) څخه لرو:

$$P(-2 \le z \le 0) = P(0 \le z \le 2) = 0.9772$$

$$P(0 \le z \le 1.75) = 0.9599$$

د ټاکل شوي مساحت د پام وړ احتمال دی.

$$P(-2 \le z \le 0) + P(0 \le z \le 1.75) = 0.4772 + 0.4599$$
$$= 0.9371$$



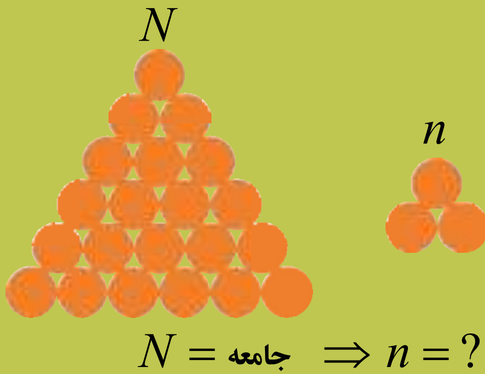



**پوښتنې**

د لومړي مثال په پام کې نیولو سره محاسبه کړئ چې د بوتلونو څو فیصده له 948 څخه تر 956 ملي‌لیټرو پورې نوشابه لري.

## نمونه اخېستل

په دې متل کې ((موټی د خروارو نمونه ده)) څرنګه تحلیلوئ.







- که چېرې وغواړئ چې د افغانستان د 12 ټولګي د زده‌کوونکو ونې(قد) اندازه کړئ ددې کار لپاره څه ډول لارې وړاندیز کوئ.
- نمونه په دوو ډولونو وېشل کېږي، ساده نمونه او ناڅاپه نمونه، تاسې ددې نمونو کومې یوې ته غوره‌والی ورکوئ؟ ولې؟
- د نمونه ګیرۍ لپاره ښکاره خپل دلایل شته آیا کولای شئ یو یا دوه دلیلونه یې ووایئ.
- سوچ کولای شئ چې د اوسط او معیاري انحراف عددي ځانګړني چې د ټولنې د توزیع او د نمونې د توزیع لپاره ورڅخه ګټه اخېستل کېږي، یو شان وي.
- آیا د نمونه‌ګیرۍ او لیدل شویو ناڅاپه متحولینو د مقدارونو ترمنځ توپیر شته؟

له پورتني فعالیت څخه پوهېږو چې د نمونه اخېستنې بېلې بېلې لارې شته دی.

ـ ناڅاپه نمونه اخېستنه: د ټولنې ټول عناصر په ټاکل کېدو کې هم چانس دی.

ـ سیستماتیک نمونه اخېستنه: د ټولنې عناصر په منظم ډول کود وهل شوی دی.

ـ طبقه‌یي نمونه اخېستنه: ټولنه په بېلابېلو متجانسو ډلو وېشل شوی وي.

ـ خوشه‌یي نمونه اخېستنه: که ټولنه ډېره لویه وي، هغه په بېلابېلو ځانګو وېشو او له هرې ځانګې څخه یوه نمونه ټاکو.

ـ د هرې ټولنې عددي ځانګړنې(اوسط، معیاري انحراف) ته د ټولنې پارامتر وایي.

ـ د هرې ټولنې د عددي نمونه‌ګیرۍ ځانګړنې(اوسط، معیار انحراف) ته آماره وایي.

ـ د نمونې پایلې د مشاهدې د مقدارونو په عنوان د ناڅاپه متحولینو په بڼه په پام کې نیسو.

ـ د $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ناڅاپه متحولونو یوه ناڅاپه نمونه د $x$ تصادفي متحول ویل کېږي.

که چېرې تابع يې په دې ډول تعريف شوی وي.

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1) \cdot f(x_2) ... f(x_n)$$

**مثال**: فرض کوو چې په يوه قطۍ کې 5 سپينې او 7 تورې ګلولې وي، د قطۍ له منځ څخه 5 ګلولې يوه يوه ځای په ځای کول(د يوه عنصر دويم ځل ټاکل مجاز) ټاکو.

د ټاکل شوی ناځاپه نمونې تصادفي متحولين په ژبه بيان کړئ او اړونده توزيع يې پيدا کړئ.

**حل**: د $x_1, x_2$ او $x_3$ ناځاپه متحولونه په پام کې ونيسئ په لومړي پړاو کې د $x_1$ ناځاپه متحول لپاره د صفر عدد د تورې ګلولې لپاره او د (1) عدد د سپينې ګلولې د ټاکلو په لومړي پړاو کې ځانته غوره کړئ او د $x_2$ متحول هم د صفر عدد د تورې ګلولې لپاره او د (1) عدد د سپينې ګلولې د ټاکلو لپاره په دويم پړاو کې ځانته غوره کړي په همدې بڼه د $x_3$ ناځاپه متحول په دويم پړاو کې هم د صفر عدد د تورې ګلولې لپاره ټاکو چې په دې پړاو کې (1) عدد سپينه ګلوله ځانته غوره کوي، په دې حالت کې د $x_1, x_2$ او $x_3$ ناځاپي متحولونه د برنولي ناځاپه متحولين دي. د $p = \frac{5}{12}$ له پارامتر او د $i = 1, 2, 3$ مقدارونو څخه لرو:

$$f(x_i) = (\frac{5}{12})^{x_i} (1 - \frac{5}{12})^{1-x_i}$$

ځرنګه چې نمونه اخيستن ناځاپه ده، نو د $x_1, x_2$ او $x_3$ ناځاپه متحولين يو له بل څخه بېل دي، نو تابع يې عبارت دی له:

$$f(x_1, x_2, x_3) = P(x_1 = x_1 \ , \ x_2 = x_2 \ , \ x_3 = x_3)$$

په ياد ولرئ چې د عناصرو هره ناځاپه نمونې له مجهول پارامترونو سره تړلې نه دي، هغې ته آماره وايي.



## پوښتنې

1. که $N = 25$ د يوې ټولنې حجم وي که وغواړو چې پنځه ګونه ناځاپه نمونه يې پيدا کړو، د هغو نمونو شمېر چې په لاس راځي څومره ده؟
2. ساده او ناځاپه نمونې سره له مثاله بيان کړئ؟
3. فرض کوو چې له يوې ټولنې څخه مو ناځاپه نمونه رانيولې ده څه فکر کوئ چې له ددې نمونې سره به څه وکړو؟

## د نمونې د اوسط توزيع

دولت غوارې وپوهېږي چې د يوه ښار د وګړو متوسطه ګټه(سيما) څومره ده؟

دډې کار لپاره ناڅاپه نمونه ټاکي او د نمونې اوسط محاسبه کوي.

اوس بايد دډې محاسبه شوې مقدار څخه کوم کميت تخمين کړئ؟

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = ?$$




- د لاندې data د دريو زده‌کوونکو د ورزشي لوبو د نمبرو پايله راښيي:

| نوم | داود | سليمان | پژواک |
|---|---|---|---|
| نمبرې | 2 | 3 | 4 |

- د نمبرو د احتمال توزيع يې وليکئ.
- د زده‌کوونکو د نمبرو اوسط او معياري انحراف حساب کړئ.
- راکړل شوی نمبرې د مرتبو جوړو په مرسته(ممکنې دوه ګونې نمونې د ځای په نيولو) ارايه او د هرې نمونې اوسط د جدول په بڼه وښيئ.
- د نمونو د اوسط د احتمال توزيع جدول(د $\bar{x}$ د کثرت د تو زيع جدول) وليکئ.
- د $\bar{x}$ د کثرت توزيع جدول مستطيلي ګراف رسم کړئ.
- د اوسط د $\bar{x}$ متحول د زده‌کوونکو د نمبرو له اوسط سره پرتله کړئ.

له پورتني فعالیت څخه دا پایله په لاس راځي:

که $x_1, x_2, ...., x_n$ د یوې ټولنې د $f(x)$ احتمال تابع ناځاپه نمونه وي، په دې صورت کې د ناځاپه نمونې احتمال توزیع عبارت دی له:

| $x$ | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\frac{1}{n}$ | $\frac{1}{n}$ | ... | |

د $\bar{x}_n$ متحول اوسط، $E(\bar{x}_n) = \mu$

د $\bar{x}_n$ متحول وریانس، $U(\bar{x}_n) = \frac{1}{n}\delta$

د نمونې وریانس $S_n{}^2 = S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

د نمونهیي وریانس اوسط، $E(S^2) = \delta^2$

په داسې حال کې چې $\bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ نمونهیي اوسط، $\mu$ د ټولنې اوسط $\delta^2$ د ټولنې وریانس $S^2$ د نمونې وریانس دی.

**مثال**: د لاندې ټولنې، ټولې دوه ګونې ممکنه ناځاپه نمونې د ځای په ځای کولو سره ټاکو:

$$f(x) = \frac{1}{3} \quad , \quad x = 1,2,3$$

**الف**: د $x$ د احتمال توزیع ولیکئ.

**ب**: د ټولنې اوسط او وریانس حساب کړئ.

**ج**: د $\bar{x}$ د توزیع جدول تشکیل او مستطیلي ګراف یې رسم کړئ.

**د**: $E(\bar{x})$ او $V(\bar{x})$ حساب کړئ.

**حل**:

**الف**:

| $x$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |

ب:

$$\mu = E(x) = \sum_{x=1}^{3} x\,f(x) = \frac{1}{3}(1+2+3) = 2$$

$$E(x^2) = \sum_{x=1}^{3} x^2 f(x) = \frac{1}{3}(1^2+2^2+3^3) = \frac{14}{3}$$

$$\delta_x^2 = E(x^2) - (E(x))^2 = \frac{14}{3} - 2^2 = \frac{2}{3}$$

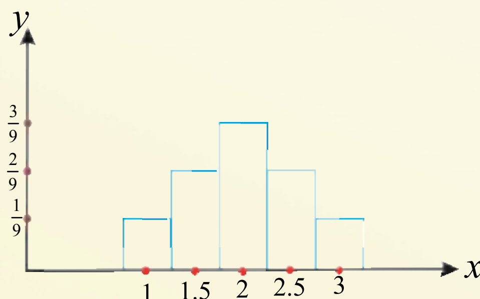
ج: د لاندې جدول ټولې دوه‌گونې ممکنو نمونو د ځای نیول، د هر یوه اوسط راښیي:

| نمونه | (1,1) | (1,2) | (1,3) | (2,1) | (2,2) | (2,3) | (3,1) | (3,2) | (3,3) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{x}$ | 1 | 1.5 | 2 | 1.5 | 2 | 2.5 | 2 | 2.5 | 3 |

د $\bar{x}$ د توزیع د کثرت جدول په لاندې ډول شودل کېږي:

| $\bar{x}$ | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(\bar{x})$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{3}{9}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{1}{9}$ |

د $\bar{x}$ مستطیلي گراف په لاندې ډول رسمېږي:




د:

$$\mu_{\bar{x}} = E(\bar{x}) = \sum \bar{x} f(\bar{x}) = 1\cdot\frac{1}{9} + 1.5\cdot\frac{2}{9} + 2\cdot\frac{3}{9} + 2.5\cdot\frac{2}{9} + 3\cdot\frac{1}{9} = \frac{18}{9} = 2$$

$$E(\bar{x}^2) = \sum \bar{x}^2 f(\bar{x}) = 1^2\cdot\frac{1}{9} + (1.5)^2\cdot\frac{2}{9} + 2^2\cdot\frac{3}{9} + (2.5)^2\cdot\frac{2}{9} + 3^2\cdot\frac{1}{9} = \frac{13}{3}$$

$$\delta_{\bar{x}}^2 = V(\bar{x}) = E(\bar{x}^2) - (E(\bar{x}))^2 = \frac{13}{3} - 4 = \frac{1}{3}$$

$$E(x) = E(\bar{x}) = 2$$

نو لیدل کیږي چې:

$$V(\bar{x}) = \frac{\delta_x^{\ 2}}{n} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$$



## پوښتنه

1. فرض کوو چې یوه ټولنه د $6,4,2$ او $8$ څلورو عددونو څخه جوړه شوې وي، په دې صورت کې توزیع، اوسط او وریانس ددې ټولنې محاسبه او وروسته له دې ټولنې څخه دوه ګونې ناځایه نمونه د ځای په نیولو سره وټاکئ او د نمونې توزیع اوسط یعنې $\bar{x}$ په لاس راوړئ. د کثرت څو ضلعي ګراف یې رسم کړئ، د $\bar{x}$ اوسط او وریانس حساب کړئ.

## د مرکزي لیمیټ قضیه

پوهیږو چې د ټولنې کمیت ته د ټولنې پارامتر او د نمونې کمیت ته نمونه یې اوسط ویل کېږي د $S_{\bar{x}}$ او $\bar{x}$ د نمونو احصائیه د کوم پارامتر په اړه اطلاعات زموږ په اختیار کې ږدي.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = ?$$




- که د لویې ټولنې حجم $\frac{S}{\sqrt{n}}$ وي، د کوچنۍ ټولنې حجم په $\frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ (چې $N$ د ټولنې د عناصرو شمېر، $n$ د نمونه عناصرو شمېر او $S$ معیاري انحراف دی) وښیو څه وخت کېدای شي چې د لویې ټولنې حجم له کوچنۍ ټولنې سره برابر شي؟
- که د $x_1 , x_2 ,\ldots, x_n$ نورمال توزیع یو له بل څخه بیل وي آیا د هغوی د جمع حاصل د نورمال توزیع لرونکی ده؟
- که $x_1 , x_2 ,\ldots, x_n$ ناخاپه ځانګړي متحولونه په یو شان توزیع شوي وي او د $\mu$ اوسط لرونکی وي او $\varsigma^2$ وریانس وي ویلای شو چې د $S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ د توزیع وریانس او اوسط څو دی؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

که چېرې $N$ د یوې لویې ټولنې اوسط $\mu$ متناهي اوسط او $\delta^2$ متناهي وریانس لرونکی یوه ناخاپه $n$ ګونه نمونه وټاکو، په دې صورت کې د نمونې اوسط یعنې $\bar{x}$ د تقریبي نورمال توزیع د $\mu_{\bar{x}} = \mu$ اوسط $\delta_{\bar{x}}^{2} = \frac{\delta^2}{n}$ وریانس دی او $Z = \frac{\bar{x} - M}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}}$ ناخاپه متحول د نورمال ستنډرډ توزیع دی. په داسې حال کې چې $\frac{N-n}{N-1}$ ضریب د $N$ د لویو قیمتونو لپاره (1) ته نژدې کېږي. په حقیقت کې یې لیمیټ هغه وخت چې $n \to \infty$ وکړی، برابر له (1) سره دی.

**مثال**: له یوه لوی ټولګي څخه چې د زده‌کوونکو د ریاضي مضمون نمبرو نورماله توزیع د 71 اوسط او معیاري انحراف یې 9 دی. یوه 9 تایي نمونه ټاکو، ددې احتمال چې ددې نمونې د نمبرو اوسط له 80 څخه زیات وي حساب کړئ. همدارنګه که چېرې په تصادفي ډول یو زده‌کوونکی وټاکو، په دې صورت کې احتمال ددې چې نمبرې یې له 80 څخه زیاتې وي، محاسبه کړئ.

**حل**: څرنګه چې $\overline{x}$ د نورمال توزیع د $\mu$ په اوسط او معیاري انحراف لرونکی دی، نولرو:

$$P(z>80)=P(z=\frac{\overline{x}-\mu}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}}>\frac{80-71}{\frac{9}{\sqrt{n}}}=P(z>3)$$

$$=1-P(z)\leq 3=1-0.9987=0.0013$$

همدارنګه د $n=1$ لپاره لرو:

$$P(z>80)=P(z=\frac{\overline{x}-\mu}{\delta}>\frac{80-71}{9}=P(z>1)$$

$$=1-P(z)\leq 1=1-0.8413=0.1587$$

**پاملرنه**:

د $P(z)$ قیمت له (2) جدول څخه په لاس راوړو.



## پوښتنه

1- د هغو جعبو وزن چې د یوه ماشین په واسطه ترل کېږي، د نورمال توزیع اوسط یې $\mu = 250gr$ او معیاري انحراف یې $\delta = 20gr$ وي مطلوب دی، د هغه احتمال محاسبه چې د ناڅاپه نمونې د اوسط وزن $n = 16$ تایي د جعبو کوچنی له $240gr$ وي.

## د نمونه‌يي توزيع نسبت



د $A$ په يوه ښار کې $n$ کسان غواړي د $B$ يوکس د ښاروال په صفت وټاکي، که داکسان تر پوښتنې لاندې راشي او $x$ د موافقو کسانو شمېر وښيئ ، ددې کسانو نسبي کثرت مساوي په څه دي.




- که چېرې $x$ د دوو جملو توزيع لرونکی وي، کولای شو وليکو چې:

$$f(x)=\binom{n}{x}P^{x}(1-p)^{n-x} \qquad x=0,1,2,\ .........$$

که چېرې $\overset{\frown}{P}=\frac{x}{n} \Rightarrow x=n\overset{\frown}{P}$ وي د $x$ قيمت په تعويض سره په پورتنی فورمول کې $f(\overset{\frown}{P})$ وليکئ.

- د $\overset{\frown}{P}=\frac{x}{n}$ په فورمول کې که د $x$ تصادفي متحول د $n$ ناخاپه متحولينو د $x_1,x_2,...,x_n$ له مجموع څخه تشکيل شوی وي، $\overset{\frown}{P}$ د نمونې اوسط سره څه اړيکه لري؟

که چېرې $x$ ناخاپه متحول، $n$ د برنولي د آزمايښتونو مجموعه، $P$ د هر آزمايښت برياليتوب احتمال وي، په دې صورت کې $\overset{\frown}{P}$ د نمونې د نسبت آماره $E(x)=n\,p$ اوسط $V(x)=n\,p\,q$ د $x$ ناخاپه متحول وريانس وي. د دوه جمله‌يي د توزيع په پاملرنې سره د $\overset{\frown}{P}$ توزيع په دې فورمول سره کولای شو.

$$f(n\overset{\frown}{P})=\binom{n}{n\overset{\frown}{P}}p^{n\overset{\frown}{p}}(1-p)^{n(1-\overset{\frown}{p})} \qquad \overset{\frown}{P}=0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},.....,1$$

د $\overset{\frown}{P}$ ناخاپه متحولينو اوسط $(Expected\ Value)$ او وريانس په لاندې صورت ليکلای شو:

$$\mu_p=E(\overset{\frown}{P})=P$$

$$\delta^2\,\overset{\frown}{P}=V(\overset{\frown}{P})=\frac{p\,q}{n}=\frac{p(1-p)}{n}$$

د نورمال سټنډرډ توزيع يې عبارت دی له:

$$z=\frac{x-n\,p}{\sqrt{n\,p\,q}}=\frac{\overset{\frown}{p}-p}{\sqrt{\frac{p\,q}{n}}}$$

**مثال**: د كاليو د ښه والي احتمال $P=0.3$ دی، یوه ساده ناڅاپه نمونه $n=6$ ګونه ټاکو. که چېرې $x$ د ناقصو کالیو ښودونکی وي، د $x$ او $\overset{\frown}{P}$ احتمال توزیع ولیکئ.

**حل**: د $x$ ناڅاپه متحول د دوه جملهيي توزیع د $P=0.3$ او $n=6$ پارامترونه وي.

$$f(x)=P(X=x)=B(x,6,0.3) \qquad x=0,1,...,6$$

د دوه جملهيي توزیع جدول څخه په ګټه اخیستنې سره لاندې احتمالونه محاسبه او د توزیع د جدول احتمال یې لیکو:

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0.1176 | 0.3025 | 0.3241 | 0.1852 | 0.0595 | 0.0102 | 0.0007 |

د $\overset{\frown}{P}$ ناڅاپه متحول د $0,\frac{1}{6},\frac{2}{6},\frac{3}{6},\frac{4}{6},\frac{5}{6}$ او 1 قیمتونه نیسي:

$$P(\overset{\frown}{P}=0)=P(X=0)=0.1176$$

$$P(\overset{\frown}{P}=\frac{1}{6})=P(X=1)=0.3025$$

او پاتې نور په مشابه ډول محاسبه کېږي، پام وکړئ چې:

$$P(\overset{\frown}{P}=\frac{x}{n})=P(X=x)$$

او د $\overset{\frown}{P}$ د احتمال توزیع عبارت دی:

| $\overset{\frown}{P}$ | 0 | 1.6 | 2.6 | 3.6 | 5.6 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(\overset{\frown}{P})$ | 0.1176 | 0.3025 | 0.3241 | 0.0595 | 0.0102 | 0.0007 |

په پورتني مثال کې:

$$P(\overset{\frown}{P}\le 0.6)=P(x\le 3.6)=P(x\le 3)=\sum_{x=0}^{3}B(x,6,0,3)=0.9294$$

اویا:

$$P(\overset{\frown}{P}\le 0.27)=P(x\le 1.62)=P(x\le 3)=0.1176+0.3025=0.4201$$



**پوښتنې**

1. ددې احتمال چې د یوه تن د غوښتنلیك فرم په پوره ډول پرته له غلطۍ(تېروتنې) څخه ډك کړي $P=0.7$ وي، یوه نمونه د $n=200$ ګونه د استخدام ډك شوي فارمونه مو ټاکلي وي.

ـ ددې احتمال محاسبه کړئ چې $\overset{\frown}{P}$ د $\pm 00.05$ داخلي فاصله کې د ټولنې له بنسټ څخه ولوېږي.

ـ ددې احتمال محاسبه کړې چې $\overset{\frown}{P}$ د 0.6 څخه زیات وي.

## د څپرکي مهم ټکي

- ناڅاپه متحول هغه اصطلاح ده چې د یوې تابع په عنوان په احصائیه او احتمالاتو کې تر ې ګټه اخېستل کېږي.
- د یوه غیر متمادی ناڅاپه متحول د احتمال تابع هغه تابع ده چې د تعریف ناحیه یې هغه عددونه دي چې ناڅاپه متحول کولای شي هغه غوره کړي او د قیمتونو له ناحیې سره د تعریف د ناحیې د عناصرو اړونده احتمالونه ګډون لري.
- د تجمعي احتمال تابع هغه تابع ده چې د تعریف ناحیه کې یې هغه عددونه ګډون ولري چې د $x$ ناڅاپه متحول یې ځانته غوره کوي او د قیمتونو ناحیه یې د $f(x)$ ټول تصویرونه موجود دي.
- د یوه متمادي متحول د احتمال تابع هغه تابع ده چې د تعریف ناحیه یې د $x$ ټول متمادي مقدارونه غوره کړي او دقیمتونو ناحیه یې $F(x)$ ټول تصویرونه وي.
- د $x$ غیر متمادي ناڅاپه متحول اوسط Expected value او وریانس په وار سره عبارت دي له:

$$E(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)=\bar{x}$$

$$V(x)=S^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(x_i))^2 f(x_i)$$

- د برنولي توزیع، $P(X=m)=P^m(1-P)^{1-m}$
- د دوه جمله‌يي توزیع، $P(X=m)=\binom{n}{m}P^m\ q^{n-m}$
- د دوه جمله‌يي توزیع اوسط او معیاري انحراف عبارت له: $\bar{x}=n\,p \quad , \quad S=\sqrt{n\,p\,q}$
- د پواسن د احتمال توزیع یوه غیرمتمادي احتمال توزیع ده چې فورمول یې عبارت دی له:

$$P(x=m)=\frac{e^{-\lambda}\ \lambda^m}{m!}$$

- که $N$ له یوې نورمالې جامعې څخه د $n$ ځلې(تایي) ناڅاپه نمونه وټاکو د $\bar{x}$ د نمونه‌يي اوسط آماره د نورمال توزیع لرونکی له $\mu_{(\bar{x})}=\mu$ اوسط سره او $\delta^2_{\bar{x}}=\frac{\delta^2}{n}$ او $z=\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}}$ د سټنډرډ نورمال توزیع سره ده.
- نورماله توزیع: د نورمال توزیع شکل له زنګولې سره مشابه او متناظر دی، په نورمال توزیع کې مرکزي شاخصونه یو له بل سره برابر دي او د پیوسته ناڅاپه متحولونو د ناحیې تعریف محدود دی چې د احتمال توزیع یې عبارت ده له: $f(x)=\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\bar{x}}{\delta})^2}$

چې $\mu$ د ټولنې اوسط او $\delta$ د ټولنې معیاري انحراف دی.

- د $f(x)$ تابع د منحني لاندې مساحت د محاسبې لپاره د $a$ او $b$ په فاصلو کې کولای شو له دې انتیګرال څخه ګټه واخلو:

$$P(a \le x \le b) = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\delta})^2}$$

- که چېرې $x$ د دوه جملهيي توزیع د $n$ شمېرد برنولي پر له پسې ازمایښتونه، $P$ د کامیابۍ احتمال او $q = 1 - p$ د هر ازمایښت د نابریالیتوب احتمال وي، په دې صورت کې د احصائیې د اوسط نمونه او د $x$ ناخاپه متحول وریانس په ترتیب سره عبارت دی له: $\overset{\frown}{P} = \frac{x}{n}$ , $E(x) = n\,p$ او $V(x) = n\,p\,q$

همدارنګه د دوه جملهيي توزیع، اوسط، وریانس او د سټنډرډ توزیع او $\overset{\frown}{P}$ ناخاپه متحول په ترتیب سره عبارت دی له:

$$E(\overset{\frown}{P}) = P \quad , \quad f(\overset{\frown}{P}) = \binom{n}{n\overset{\frown}{P}} P^{n\overset{\frown}{P}}\, q^{(1-P)}$$

$$z = \frac{\overset{\frown}{P} - P}{\sqrt{\frac{p\,q}{n}}} \quad , \quad V(\overset{\frown}{P}) = \frac{p\,q}{n}$$

- ددې $z = \frac{x-\mu}{\delta}$ اړیکې په واسطه کولای شو چې هره احصائیوي مجموعه د نورمال توزیع لرونکې وي هغه په سټنډرډ نورمال بدل کړو.
- نمونه په دوو برخو وېشل کېږي، ساده نمونه او ناخاپه نمونه.
- د نمونه ګیرۍ طریقې په عمومي ډول عبارت دي له: ناخاپه نمونه‌ګیري، منظمه نمونه‌ګیري، ګروپي نمونه‌ګیري، خوشه‌يي نمونه ګیري.
- د $x$ نمونې ناخاپه متحولینو اړوند تابع په دې صورت تعریفېږي.

$$f(x_1, x_2, x_3, \ ..........\ , x_n) = f(x_1), f(x_2), \ ..........\ , f(x_n)$$

- که چېرې $x$ د ټولنې یوه ناخاپه نمونه د $f(x)$ د احتمال تابع په لرلو سره وي $E(\overline{x}_n) = \mu$ اوسط، $V(\overline{x}_n) = \frac{1}{n}\delta$ د اوسط وریانس، $\delta^2$ د ټولنې وریانس او $S^2$ ته د نمونو وریانس وایي.

## د څپرکي پوښتنې

1. دوه سکې څلور ځلې پورته واچوئ او د خط راتللو شمېر په پام کې ونیسئ:
   - ناڅاپه متحولونه د تابع په بڼه وښیئ.
   - د هر ځل د پورته اچونې احتمال نمونه‌یي فضا سره نسبت ورکړئ.
   - د تابع د تجمعي او مجزا احتمال ولیکئ.

2. که چېرې د یوې جوړې بوټونو د نقیصي احتمال $P = 0.1$ وي، د ناقصو بوټونو اوسط او معیاري انحراف په یوه نمونه کې $n = 400$ جوړو بوټونو پیدا کړئ.

3. د یوه شرکت په ګدام کې $500$ پایې کمپیوټرونه شته چې د هغې له جملې څخه یې $50$ پایې نقص لري، یو اخېستونکی له هغې څخه $10$ پایې کمپیوټرونه اخلي، ددې احتمال څومره دی چې هغه $8$ پایې جوړ اخېستی وي؟

4. لاندې اطلاعات چې اوسط او معیاري انحراف د دوو پارامترونو په اړونـد دی د نورمال توزیع د رسمولو لپاره ترې ګټه واخلئ. لومړی یو افقي محور رسم کړئ او د $\overline{x}$ ، $\overline{x}+s$ ، $\overline{x}-s$ , $\overline{x}+2s$ او $\overline{x}-2s$ ټکي پرې وټاکئ وروسته یو ټکی د $h$ اختیاري جګوالي په اندازه د $\overline{x}$ له پاسه په پام کې ونیسئ او $\overline{x}+s$ له پاسه یو ټکی د $0.6h$ په جګوالي وټاکئ، یعنې یو ټکی چې مختصات یې $(\overline{x}+s, 0.6h)$ وي، څرنګه چې د نورمال منحني متناظر دی، همدا عمل په ځانګړې توګه په $\overline{x}-s$ هم سرته ورسوئ. اوس د $\overline{x}-2s$ , $\overline{x}+2s$ د پاسه دوه ټکې د $h$ او $0.15h$ په جګوالي په پام کې ونیسئ، پام وکړئ چې د نورمال منحني د دقیق رسمولو لپاره د $0.6067h$ او $0.1354h$ په ځای له $0.6h$ او $0.15h$ څخه ګټه واخلئ. په پایله کې دا ټکي د یوه منحني په واسطه وصل او ووایئ چې دا منحني په کومو فاصلو کې محدب او په کومو فاصلو کې مقعره ده.

5. په یوه روغتون یوه څېړنه راښیي چې د مراجعینو شمېر د شنبې په ورځ وروسته له وخت څخه د $6$ او $8$ ترمنځ $25$ تنه دی. فرض کړئ چې د پواسن د احتمال توزیع په دې حالت کې صدق وکړي.
   - د روغتون د مراجعینو د احتمال توزیع د دوشنبې له ورځې، وروسته له وخت څخه د $6$ او $8$ ساعتونو تر منځ پیدا او ګراف یې رسم کړئ؟ آیا دا توزیع خمېده ده؟
   - ددې توزیع د اوسط او معیاري انحراف مقدار په لاس راوړئ.
   - آیا دا ممکنه ده چې د دوشنبې په ورځ وروسته له وخت څخه د $6$ او $8$ ساعتونو ترمنځ به له $7$ تنو څخه زیات روغتون ته مراجعه کړې وي؟ ولې؟

6. فرض کوو چې د یوه کتاب د یوه مخ د تېروتنو شمېر د پواسن د توزیع یا $\lambda = \frac{1}{2}$ پارامتر لرونکی دی د محاسبې احتمال یې مطلوب دی داسې چې:

- حد اقل یوه ټاپپي تېروتنه په هغه مخ کې وي.
- دقیقاً 5 ټاپپي تېروتنې په هغه مخ کې دي.
- د 3 او 6 ترمنځ ټاپپي تیروتنې په هغه کې وي.

7. فرض کوو چې د هغه پستون قطر چې د یوه اتوماتیکي ماشین په واسطه جوړېږي په نورمال یا اوسط ډول 25 ملي متر او معیاري انحراف یې 0.5 ملي متره توزیع شوی وي.
   - کله چې د پستون قطر د 25.2 او 25.9 ترمنځ وي احتمال یې څومره دی.
   - د پستونونو کوم نسبت د 25 ملي قطر لرونکی او له هغې څخه کم دی.
   - که چېرې 1000 پستونه جوړ شي، له هغوی څخه څو دانې ددې وړ دی چې 24.07 ملي مترو څخه کم قطر ولري.
   - د تولید شویو پستونونو څو فیصده د 24.56 ملي متره معادل قطر یا له هغه څخه زیات لري.

8. که چېرې $x_1, x_2, \dots, x_n$ د $x$ ناخاپه متحول یوه تصادفي نمونه وي ایا د $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ ، $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ ، $\frac{x_1+x_2}{x_4}$ او $x_1+3x_2-x_3$ تابع آماره دی.

9. که چېرې $x$ یو ناخاپه متحول او د $\mu$ او $\delta^2$ پارامترونه وي آیا د $\frac{3x_1-2x_3-\delta}{8\mu+x_2}$ ، $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)$ او $x_1+x_3-\mu$ توابع $\mu$ او $\delta^2$ مجهول وي آیا پورتنیو تابعګانو ته احصائیه ویلی شو؟

10. ټولنه د برق په څلورو ډلو کې ګډون لري، که د عمرونو اوږدوالی یې د ساعتونو په حساب سره عبارت له 108 104 112 103 دي یوه ډله ناخاپه ټاکو، فرض کوو چې د $x$ ناخاپه متحول ټاکل شوی د ډلو د عمر اوږدوالی راوښیئ:
    - د $x$ د احتمال توزیع ولیکئ.
    - $E(x)$ او $V(x)$ محاسبه کړئ.

11. د یوه ښار د وګړو د ګټې اندازه چې د غیرنورمال توزیع $\mu=90$ افغانی اوسط او د 25 افغانی معیاري انحراف سره دی که چېرې د 225 کسیز د وګړو د یوې نمونې د ګټې مجموعه له 2100 افغانیو څخه زیاته وي، احتمال یې څومره دی؟

12. پوهېږو چې 56% وګړي د $A$ نوماند طرف دار دی، څومره ددې احتمال شته چې $n=50$ دوه‌ګونې یوه نمونه کې حداقل 60% وګړي د $A$ نوماند طرفدار وي.

13. په 12 مثال کې که چېرې $P=0.4$ وي، یعنې ددې احتمال چې یو وګړی د $A$ کاندید طرفدار وي 0.4 دی، یوه $n=200$ ګونه نمونه وټاکو، نو څومره ددې احتمال شته چې لااقل 100 وګړي د $A$ کاندید طرفدار وي.

# اتم څپرکی

# احتمالات



## بېلې شوې(غيرمتمادي) او نښتې(متمادي) فضاګانې



په مخامخ شکلونو کې د لومړي او دويم نل څخه په وار سره اوبه په څمکه توييږي ويلای شئ چې له دې نلونو څخه په څمکه د اوبو د څاڅکو د تويېدو توپير په څه کې دی؟




- د يو رمل په اچولو سره ويلای شي چې د نمونه يي فضا ټولې ممکنې پايلې کومې دي؟
- آيا له ونې څخه د يوې پخې مڼې د لويدلو د وخت وړاندوينه کولای شئ چې وروسته له څو ثانيو، دقيقو او يا ساعتونو څخه پر څمکه ولوېږي؟
- نظر وخت ته د مڼې د لويدلو نمونه يي فضا وليکئ.
- د رمل دانې د اچولو تجربې نمونه يي فضا د عناصرو شمېر او له ونې څخه د مڼې د لوېدلو وخت څنګه پرتله کولای شي.

د پورتني فعاليت له سرته رسولو څخه لاندې پايله په لاس راځي:

د يوې ناڅاپه تجربې نمونه يې فضا عبارت له هغه ټاکلې او يا نا ټاکلې سټ يا مجموعې څخه ده چې څينې عناصريې د شمېر وړ او څينې يې د شمېر وړ نه وي.

هغه نمونه يې فضاګانې چې عناصر يې د شمېر(countable) او تشخيص وړ وي د غيرمتمادي نمونه يې فضا په نامه يادېږي او هغه نمونه يي فضاګانې چې عناصر يې د شمېر وړ نه وي د نښتې(متصلې) يا متمادي نمونه يې فضا په نامه يادېږي.

**لومړی مثال**: له لاندې نمونه يې فضاګانو څخه کومه يوه نښتی(متمادی) او کومه يوه غيرمتمادی ده.

**الف**: د دوو رمل دانو اچول

**ب**: د 8 او 12 ترمنځ د يوه حقيقي عدد ټاکل.

**ج**: له 30 زده کوونکو څخه د 3 تنو ټاکل

د: د یوې کُرې د حرارت د یوې درجې لوړېدل د 100 درجو د سانتي ګرېډ څخه تـر 1000 درجـود سـانتي ګرېـډ پورې.

هـ : د $30^\circ$ او $45^\circ$ زاویو ترمنځ یوه زاویه ټاکل.

**حل**: څرنګه چې (الف او ج) نمونه‌یي فضاګانې د محدودو غړو له شمېر څخه جوړې شوې، نو غیرمتمـادي فـضا ولې (ب، د او هـ) له نامحدود حقیقي عددونو څخه تـشکیل(جـوړ) چـې د شـمېر وړ نـه دي، نـو نـښتي یـا متمـادی فضاګانې دي.

**دویم مثال**: خیبر د کور د ګلانو د اوبولو لپاره یو واټرپمپ اخیستی دی.

که چېرې د واټرپمپ عمرد ساعت له مخې په پام کې ونیسو، په دې حالت کې د واټرپمپ د عمر د اوږدوالی نمونه-یي فضا چې کېدای شي هر مثبت حقیقي عدد د واټرپمپ د ورانېدو په صورت کې  دکار د مودې قیمـت شـي، پـه دې ډول د داسې ناڅاپه حادثې پېښېدل هر حقیقي عدد کېدای شي چې دا نمونه‌یي فضا یوه غیـر متمـادي، یـا نـښتي نمونه یې فضا د، یعنې { t د واټرپمپ د ورانېدو وخت، $S = \{t \in IR : t \geq 0$  چې په پورتنۍ نمونه یې فـضا کـې t د واټرپمپ د عمر اوږدوالي راښيي.

**یادونه**:

1- د لومړي مثال الف او ج جزونو کې محدودې نمونه‌یي فضاګانو څخه بحث شوی چې عناصـر یـې د شـمېر وړ دي، د ب او د جزونو کې نامحدودې نمونه‌یي فضاګانې ذکر شوې چې عناصر یې د شمېر وړ نه دي، نـو څکـه ټول مثبت حقیقي عددونه اخېستلای شي.

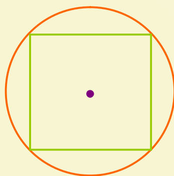
2- په دویم مثال کې نمونه‌یي فضا متصله یا غیر محدوده ده چې د حقیقي عددونو د انټروال په توګه ښودل کېږي.



## پوښتنې

1- یو غشي ویشتونکی د یوه دایروي د سک په دننه چې وړانګه یې r ده، په پام کې ونیسي. د غشي د لګېدو ځای د دایرې په دننه کې چې مرکز ته نژدې ولګېږي، د هغې نمونه یې فضا ارایه کړې. وواياسـت چـې دا څنګـه یـوه نمونه یې فضا ده.

2- په مخامخ شکل کې په ناڅـاپي یـا تـصادفي ډول د دایـرې پـه دننه کې یو ټکـې و ټـاکئ، احتمــال ددې شـته چـې مطلوب ټکې د مربع په دننه کې وي.



3- یو طبیعي دوه رقمی عدد و ټاکئ، هغه احتمـال پیدا کړئ چې عدد د 4 مضرب وي.

## هم چانسه پېښې



د یوې نورمال رمل دانې په اچولو کې د (1) او یا (5) شمېرې مخ ته راتللو لپاره شرط څه دی؟

د 2 او 5 شمېرې د راتللو چانس یو له بل سره څه اړیکه لري؟




د مخامخ شکل په څېر یوه دایره په پام کې ونیسئ، که چېرې په راکړې شوې دایره کې یو ښکاري غشي وولي لاندې پوښتنو ته ځواب ورکړئ.



- په سور رنګه ناحیه او شین رنګه ناحیه کې د غشي لګېدل یو له بل سره څه اړیکه لري؟
- د غشي د لګېدو چانس د کچې په اړه د نارنجي او سپینو رنګونو سره په پرتله باندې څه ویلای شې؟
- په تور رنګ د غشي د لګېدو چانس څومره ده؟
- د تجربې، نمونه‌یي فضا ولیکئ.
- لومړني ناځاپه پېښې لست کړې او د هر یوه احتمال پیدا کړئ ؟
- د لومړنیو پېښو د احتمالونو د مجموع په برخه کې څه ویلای شې؟

د پورتني فعالیت له اجراکولو څخه لاندې پایله په لاس راوړو:

هغه لومړنۍ ساده پېښې چې د هغوی د پېښېدلو چانس د یوې تجربې په اجراکولو کې سره برابر وي، د هم چانسه پېښو په نامه یادېږي، لکه:

که چېرې $S=\{e_1,e_2\ ,\dots e_n\}$ یوه نمونه یي فضا وي، نو $\{e_i\}$ د هر $i=1,2\dots n$ لپاره یوه ناځاپه لومړني پېښه ده که $0\le P(\{e_i\})\le 1\quad ,\quad i=1\ ,\ 2\ ,\dots n$ دي.

سربېره پر دې د لومړنیو پېښو د احتمالونو مجموع مساوي له یوه سره ده.

$$P(\{e_1\})+P(\{e_2\})+\dots+P(\{e_n\})=\sum_{i=1}^{n}P(e_i)=1$$

**مثال**: څلور تنه په یوه لوبه کې ګډون کوي. تاسې د هر یوه د ګټلو احتمال پیدا کړئ په داسې حال کې چې نمونه‌يي فضا هم چانسه وي.

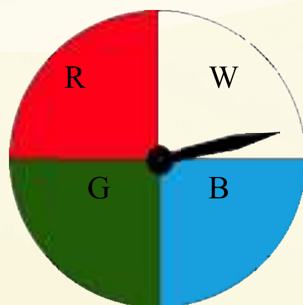
**حل**: که چېرې $S = \{a, b, c, d\}$ نمونه يې فضا وي، نو د هرې ناڅاپه لومړنۍ پېښې احتمال $\frac{1}{4}$ دی.

لړو چې:
$$P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = \frac{1}{4}$$

پاسنۍ لومړنۍ پېښې سره هم چانسه دي.



## پوښتنې




1- مخامخ شکل په پام کې ونيسئ ، که چېرې د عقربې(ستنې) د دریدلو احتمال په آسماني او سپین رنګ 0.30 او د سره رنګ پرمخ 0.26 وي، د شنه رنګ پرمخ د دریدلو احتمال به څومره وي؟

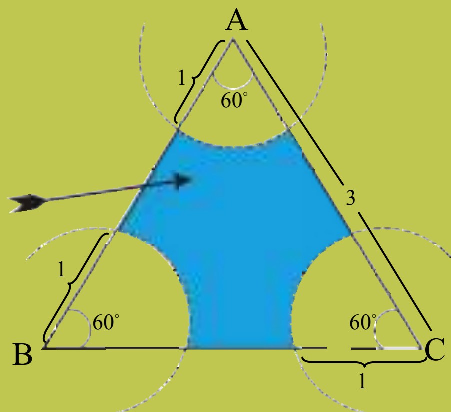
2- لاندې د کثرت جدول د رمل یوې دانې د اچولو لپاره په پام کې ونیسئ. هغه احتمال پیدا کړئ چې د رمل دانه (5) شمېره راشي.

| د رمل شمېره | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| کثرت | 7 | 9 | 8 | 7 | 3 | 10 |

3- د رمل یوه دانه داسې ډکه شوی چې د جفت شمېرو د راتللو احتمال د طاق شمېرو دوه برابره وي، که یو ځل په شرط وهلو کې(5) شمېره ټاکلې وي، د هغې احتمال پیدا کړئ.

## د نبتي يا پيوسته(متمادي) فضاګانو احتمال

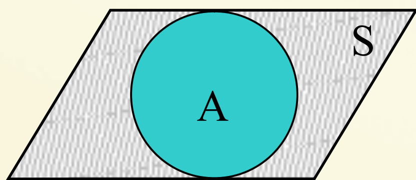
د يوه متساوي الاضلاع مثلث دننه چې هره ضلعه يې 3 واحده ده، يو غشي ولو، ددې احتمال چې د غشي د لګېدلو ټکې د مثلث د هر رأس نه د يو واحد په اندازه لرې وي، څو دی؟







- آيا ويلای شي چې د يوې ټوټه کرښې، د يوې مستوي د يوې برخې او يا د فضا د حجم څو ټکې يو پر بل پسې موجود دي؟
- د هغو ټکو د پېښېدلو احتمال چې د A په برخه کې چې د S د لويې برخې فرعي مساحت دی، لکه څرنګه چې په شکل کې ليدل کېږي د A او د S ساحو د مساحتونو له نسبت سره څه اړيکه لري؟




- آيا کولای شئ دا مسئله په فضا کې د يوه جسم حجم د يوې برخې د احتمال د محاسبې لپاره عموميت ورکړئ؟

د پورتني فعاليت له سرته رسولو څخه لاندې پايله لاسته راځي.

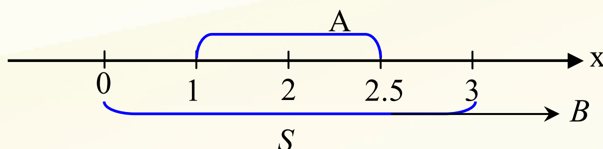
پيوسته(متمادي) نمونه‌يي فضا د نامعينو ټکو مجموعه ده چې شکل يې د عددونو په محور ، په مستوي کې لکه سطح او يا په فضا کې لکه حجمونه دي، څرنګه چې ددې ټکو شوونه ممکن نه ده، نو د احتمال د نسبت پيدا کولو لپاره د ټوټه کرښو د اوږدوالي، د اشکالو سطحو او يا د جسمونو له حجم څخه استفاده کوو.

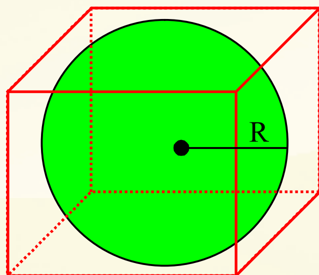
معمولاً د عددونو له محور څخه په ګټه اخيستنې سره د $x$ يو متحول، د يوه مساحت د يوې برخې لپاره د دوو متحولينو لکه x او y او په همدې ترتيب د حجمونو لپاره له دريو متحولونو ، لکه: $x, y$ او $z$ څخه ګټه اخلو.

**لومړی مثال**: د عددونو په محور د $(0,3)$ په انټروال کې د $x$ يو ټکی په ناڅاپي يا اتفاقي ډول ټاکو ددې احتمال پيدا کړئ چې $1 < x < 2.5$ وي؟

**حل**: د حقیقي عددونو محور رسم کړئ د S او A فاصلې د هغه پر مخ ټاکو، د شکل په پام کې نیولو سره د A پیښې د پیښېدو احتمال څخه لرو:

$$P(A) = \frac{\text{د } A \text{ ټوټه کرښې اوږدوالي}}{\text{د } B \text{ ټوټه کرښې اوږدوالي}} = \frac{2.5-1}{3-0} = \frac{1.5}{3} = \frac{1}{2}$$




**دویم مثال**: په ناخاپه ډول یو ټکی د یوه مکعب په دننه کې چې ضلعه یې 2 واحده وي ټاکو ددې احتمال پیدا کړئ چې نوموړي ټکې د مکعب د محاطي کُرې په دننه کې وي.

**حل**: که چېرې کره د هغه مکعب په دننه کې چې ضلعه یې a واحده ده، محاطه وي، نو د کرې شعاع $r = \frac{a}{2}$ کېدای شي:

A ناخاپه پیښه د کرې د حجم او S نمونه یې فضا سره مساوي چې د مکعب حجم دی، نو لرو:

$$r = \frac{a}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$P(A) = \frac{\text{د کرې حجم}}{\text{د مکعب حجم}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{a^3} = \frac{\frac{4}{3}\pi (1)^3}{2^3} = \frac{\pi}{6}$$

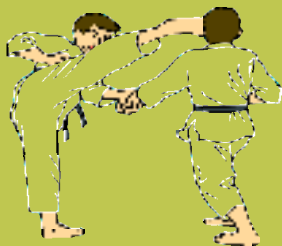


## پوښتنې

1- د حقیقي عددونو په محور د A او B دوه ټکي په ناخاپي یا تصادفي ډول داسې ټاکو چې $0 \le A \le 3$ او $-2 \le B \le 0$ وي، ددې احتمال پیدا کړئ چې د d واټن د A او B ترمنځ وي او له 3 واحدو څخه لوی وي.

2- که چېرې یو ټکی په ناخاپي یا تصادفي ډول د دایرې د سطحې پرمخ وټاکو، ددې احتمال پیدا کړې چې نوموړي ټکي نظر د دایرې محیط ته د دایرې مرکز ته نژدې وي.

## مشروط احتمـال

له یوه ولایت څخه (20) تنـه نارینـه او ښـځینه زده کـوونکی د کانکور په آزموینـه کـې د طب پـوهنځي تـه بریـالي شـوي دي، د هغوي له جملې څخه یې 5 تنه ښه کاراته بازان دي: که په 15 تنو بریالیو نارینه وو کې 4 تنه یې ښه کارته بـازان وی. د نومړو محصلینو له مینځ څخه پـه اتفـاقي ډول یـو تن ټاکو احتمـال د دې پیدا کړئ چې:

- ټاکل شوی محصل یوه کارتې بازه نجلی وي؟
- په پورتني سوال کې هغه نجلی په کوم شرط سره د طب پوهنځي ته بریالی شوي ده؟



فعالیت

له 2500 زده‌کوونکو څخه 1600 تنه یې په مطالعه کولو عادت لري.

چې لـه 80% زده‌کوونکـو څخـه یـې 70% نارینـه زده‌کـوونکي وي او پـه مطالعـه کولـو عـادت ولـري، کـه د ټولـو زده‌کوونکو لپاره احتمـال یو شان وي، د لاندې پېښو په پام کې نیولو سره د یوه تن زده‌کـوونکی ټاکـل د ښـوونځی لـه زده‌کوونکو څخه:

R: له مطالعې سره عادت لري.

$M$ : نارینه زده‌کوونکي دی.

F: یوه ښځینه زده‌کوونکې ده.

د لاندې پوښتنو په حل فکر وکړئ:

- ددې احتمال پیدا کړئ چې د مطالعه کوونکو له منځ څخه ټاکل شوي زده‌کوونکی نارینه وي؟
- ددې احتمال پیدا کړئ چې د مطالعه کوونکو له منځ څخه ټاکل شوی تن یوه ښځینه وي؟
- ددې احتمـال پیدا کړئ چې ټاکل شوي زده‌کوونکي یو نارینه وي په دې شرط چې په مطالعه عادت وي.

د پورته فعالیت د سرته رسولو څخه لاندې پایله په لاس راوړو:

په حقیقت کې د هغه نارینه زده‌کوونکي د ټاکلو احتمـال په دې شرط چې په مطالعه عادت ولري.

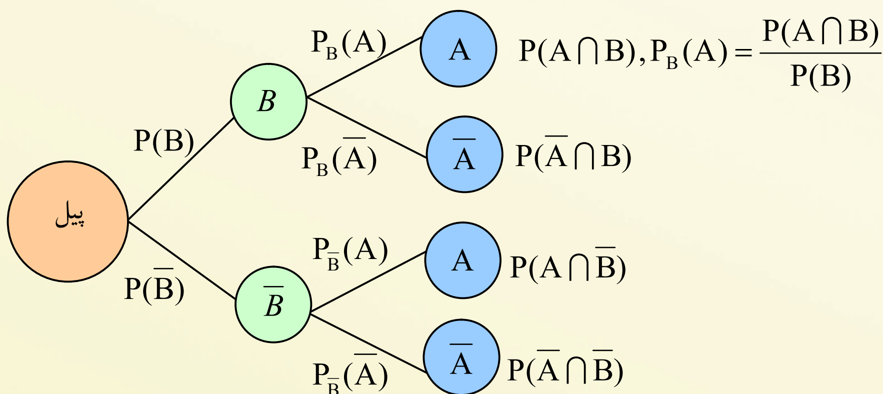
د لاندې احتمالات وېش له حاصل څخه عبارت دی که چېرې $\Omega$ ټوله نمونه‌يي فضا او $|\Omega|$ نمونه‌يي فضا د عناصرو شمير وي، نو لرو:

$$P_R(M) = \frac{P(M\cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{|M\cap R|}{|\Omega|}}{\frac{|R|}{|\Omega|}} = \frac{|M\cap R|}{|R|} =$$ د هغه نارينه زده‌کوونکو د ټاکلو احتمال چې په مطالعه عادت وي.

$P_R(M)$ د هغې پيښې له احتمال څخه عبارت دی چې ټاکلي زده‌کوونکي نارينه وي، په دې شرط چې هغه په مطالعه عادت وي.

**تعريف**: که چېرې S نمونه‌يي فضا A او B د نمونه‌يي فضا دوې ناخاپي پيښې وي، په داسې حال کې چې $P(B)\neq 0$ وي. په دې حالت کې نومورې احتمال يعنې $P_B(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ چې د A ناخاپي پيښې احتمال نظر د B ناخاپي پيښې ته مشروط احتمال بلل کېږي.

د پورته تعريف په پام کې نيولو سره نظر د مسير لومړي قاعدې ته د ونه‌ييز دياگرام په مرسته هم په لاس راوړای شو.



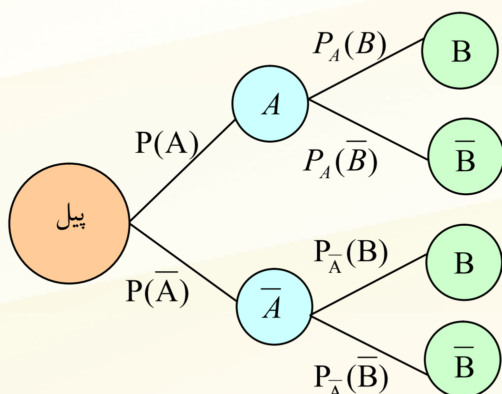

د مشروط احتمال له فورمول څخه لاندې مهمې پايلې په لاس راځي:

1- د مسير له لومړۍ قاعدې څخه لرو: $P(A\cap B)=P(B)\cdot P_B(A)$

د مسير له دويمې قاعدې څخه په ګټه اخيستنې سره لرو: $P(A\cap \overline{B})=P(\overline{B})\cdot P_{\overline{B}}(A)$

$$P(A)=P(B)\cdot P_B(A)+P(\overline{B})\cdot P_{\overline{B}}(A)$$

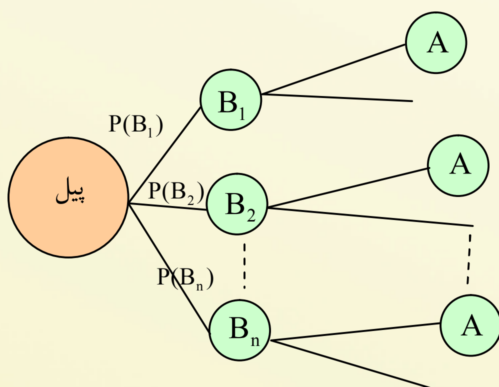
2- ونه‌ييزه(درختي) دياګرام له مخې $P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$




له لومړي پایلې څخه په لاس راځي چې: $P_A(B)=\dfrac{P_B(A)\cdot P(B)}{P(B)\cdot P_B(A)+P(\overline{B})\cdot P_{\overline{B}}(A)}$

3- که چېرې نومورې حالت د $\Omega$ نمونه يي فضا ناڅاپي پيښو د $B_1, B_2, \dots, B_n$ اختياري وېش لپاره عموميت ورکړو. د ونې په ډول د دیاګرام په پام کې نیولو سره کولای شو، لاندې فورمول په لاس راوړو.

$$P_A(B_i)=\frac{P_{B_i}(A)\cdot P(B_i)}{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+\dots+P(B_n)\cdot P_{B_n}(A)}=\frac{P(A\cap B_i)}{\sum_{k=1}^{n}P(B_k)\cdot P_{B_k}(A)}\qquad i=1,2,\dots,\ n$$




**لومړی مثال**: یو زده کوونکی ښوونځي ته د تللو لپاره 50% هره ورځ د موټر څخه ګټه اخلي چې 70% په ټاکلي وخت ښوونځي ته رسېږي. په منځني ډول نومورې 60% په ټاکلي وخت ښوونځي ته حاضرېږي که چېرې پيښې:

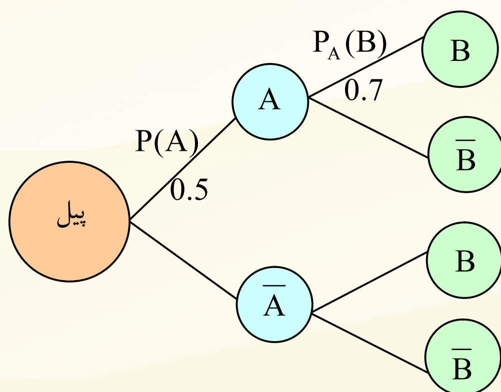
A: د موټر په واسطه راتلل    B: په ټاکلي وخت رسېدل

وي په دې صورت کې د A مشروط احتمال نظر B ته یعنې $P_B(A)$ مطلوب دی؟

**حل**: د نوموړي احتمال د پیدا کولو لپاره د ونهییز یا درختي دیاګرام په پام کې نیولو سره نظر فورمول ته په لاندې ډول په لاس راځي:

$$P_B(A)=\frac{P(A)\cdot P_A(B)}{P(B)}=\frac{0.5\cdot 0.7}{0.6}=0.5833=58.33\%$$

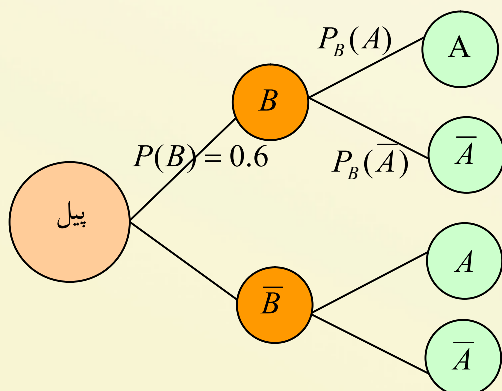
نو په دې اساس د موټر په واسطه د رسېدلو احتمال په دې شرط چې په ټاکلي وخت په شوونځي کې وي 58.33% سلنې سره برابر دی.



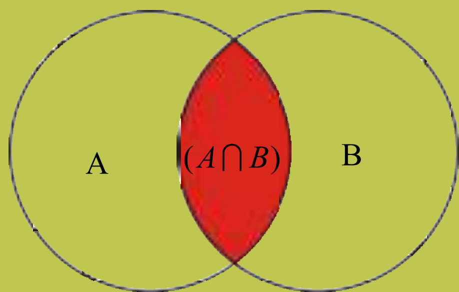



## پوښتنې

له لاندې دیاګرام څخه په ګټه اخیستنې سره د مشروط احتمال په ټاکلي وخت رسېدل ښوونځي ته په دې شرط چې د موټر په واسطه سرته رسیدلي وي، یعنې $P_A(B)$ د ناڅاپه پیښې احتمال ښوونځي ته په ټاکلي وخت رسیدل، په دې شرط چې د موټر په واسطه نه وي راغلي یعنې $P_{\overline{A}}(B)$ مطلوب دی.



## د حاصل ضرب اصل




د A ناخاپه پیښې مشروط احتمال په B ، د A او B ناخاپه پیښې احتمال یو له بل سره څه اړیکه لري؟

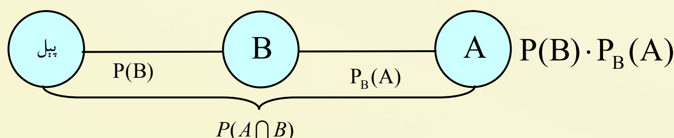



- که چېرې A او B دوې ناخاپه پیښې د S په نمونه یي فضا کې وي.
- د A ناخاپه پیښې مشروط احتمال B ته ولیکئ.
- د ونهیز دیاګرام څخه په ګټه اخېستنې سره د $P(B)\cdot P_B(A)$ قیمت په لاس راوړئ.
- د $(A\cap B)$ ناخاپه پیښو احتمال د A او B ناخاپه پیښو څخه او یا د A مشروط له B څخه په ګټه اخیستنې سره ولیکئ.
- د فعالیت د دوو پورتنیو بندونو د محاسبې پایلې یو له بل سره پرتله کړئ.
- آیا کولای شو چې موضوع د ډېرو ناخاپه پیښو لپاره عمومیت ورکړو.

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې پایله په لاس راوړو.

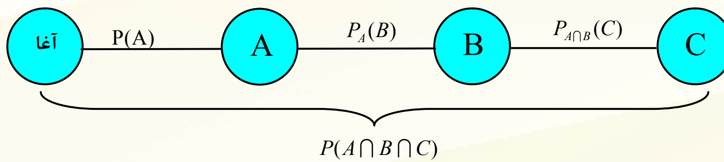
د S په یوه نمونه یي فضاکې د A او B د دوو ناخاپه پیښو لپاره د مشروط احتمال د تعریف په پام کې نیولو سره لرو: $P(A\cap B)=P(B)\cdot P_B(A)$

دا مسئله کولای شو چې د ونهیز دیاګرام په مرسته هم په لاس راوړو:




$$\Rightarrow P(A\cap B)=P(B)\cdot P_B(A)$$

دا مطلب د دريو A، B او C پيښو لپاره په لاندې ډول پراخوو.




$$\Rightarrow P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{A\cap B}(C)$$

پورتنی قاعده د حاصل ضرب په نامه يادېږي او کولای شو، هغه د يو شمېر اختياري ناخاپي پيښو لپاره هم په لاس راوړو.

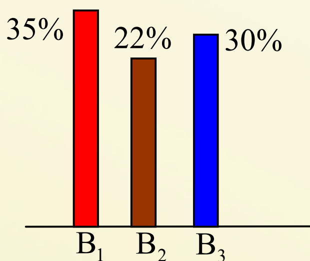
**مثال**: د $B_1$, $B_2$ او $B_3$ دريو ولايتونو په پارلماني ټاکنو کې چې د هر يوه لپاره د ټاکنو د ګډون کوونکو فيصدي او د جمهوري ګوند برخه فيصدي ورکړل شوې ده؟

په کوم احتمال د ټاکنو ګډون کوونکي او يا رايې اچوونکي جمهوري ګوند ټاکلي وي.

**حل**: په لاندې ډول ناخاپي پيښې تعريف او نوموو:

V : هغه رايې ورکوونکي چې جمهوري ګوند يې ټاکلی دی.

$B_i$ : د ولايت رايې ورکوونکي $B_i$ – (i-ام) ... i=1,2,3 لاندې ارقام ورکړل شوي وي.




| جمهوري ګوند ته رايې ورکوونکي | د راي ورکوونکو فيصدي | ولايت |
|---|---|---|
| 35 | 33.2% | $B_1$ |
| 22 | 46.5% | $B_2$ |
| 30 | 20.3% | $B_3$ |

د $B_i\ (i=1,2,3)$ ناخاپه پيښې په حقيقت کې يې د S نمونه يي فضا يو وېش جوړ کړی چې د هغوی لپاره صورت نيسي.

1- $B_i$ يو له بل سره دوه په دوه مستقل او ګډ عناصر نه لري.

2- د S نمونه يي فضا لپاره $S=B_1\cup B_2\cup B_3=\bigcup_{i=1}^{3}B_i$ دی، نو $(i=1,2,3)$ $B_i\cap V$ پيښې يو له بل سره يو په يو مستقل د هغوی لپاره صورت نيسي. $V=\bigcup_{i=1}^{3}(B_i\cap V)$

له دې اړیکې څخه کولای شو، د دواړو خواوو د احتمال لپاره ولیکو:

$$P(V)=P\left(\bigcup_{i=1}^{3}(B_i\cap V)\right)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i\cap V)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)\cdot P_{B_i}(V)$$
$$=P(B_1)\cdot P_{B_1}(V)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(V)+P(B_3)\cdot P_{B_3}(V)$$
$$=0.332\cdot 0.35+0.465\cdot 0.22+0.203\cdot 0.3=0.1162+0.1023+0.0609$$
$$=0.2794=27.94\%$$

**تعریف**: که چېرې د $B_1, B_2, ....., B_n$ خرنګه چې $\mathrm{P(B_i)}\neq 0$ وی $i=1,...n$ پېښو عمومي حالت د S په نمونه‌یي فضا کې یوه پېښه وي، نو $P(A)$ د کامل احتمال په نامه یاد او د A اختیاري ناخاپې پېښې لپاره لرو:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)$$

د مشروط احتمال د تعریف، د اصل حاصل ضرب له قضیې څخه د کامل احتمال د مسئلې په پام کې نیولو څخه لاندې فورمول چې د بائیز(Baye's) د فورمول په نامه یادېږي، په آسانی سره په لاس راځي، داسې چې $B_i$ چې $i=1,...n$ د S نمونه یي فضا یوی پېښې لپاره چې $P(B_i)\neq 0$ ، $i=1,...n$ د A د ناخاپه پېښې احتمال چې $\mathrm{P(A)}\neq 0$ سره وي، لرو:

د بائیز (Bayes)فورمول:

$$\boxed{P_A(B_i)=\frac{P(A\cap B_i)}{P(A)}=\frac{P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}{\sum_{k=1}^{n}P(B_k)\cdot P_{B_k}(A)}}$$

د بائیز فورمول ډېر استعمال لري لکه د $n=2$ لپاره $B_2=\overline{B}\,, B_1=\overline{B}$ په پام کې ونیسو، په حقیقت کې $B_1$ او $B_2$ د $S$ نمونه یي فضا پېښې وي لرو:

$$P_A(B)=\frac{P(B)\cdot P_B(A)}{P(B)\cdot P_B(A)+P(\overline{B})\cdot P_{\overline{B}}(A)}$$

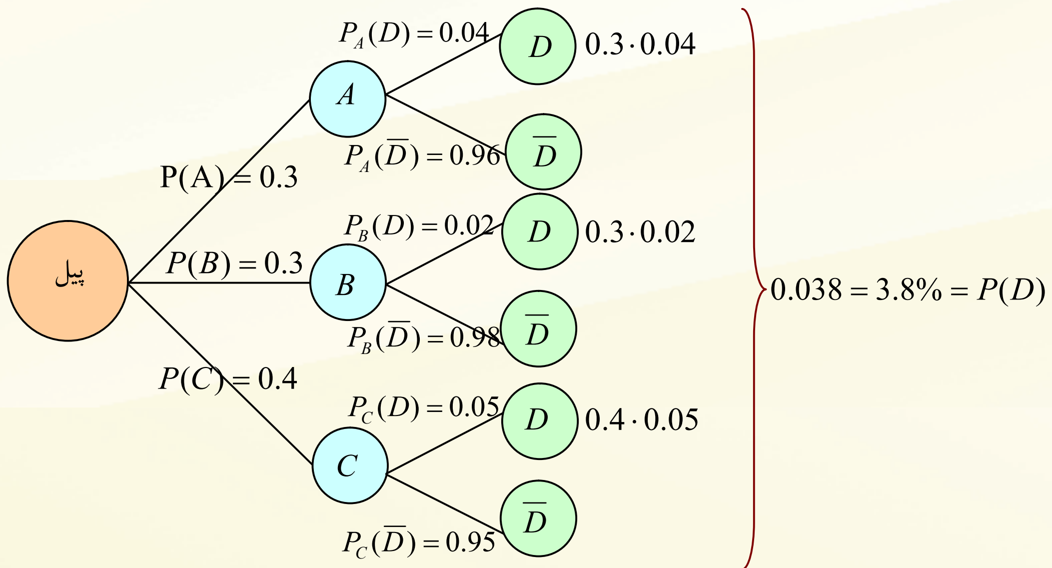
پورتنی فورمول د $n=2$ د بائیز له فورمول څخه عبارت دي.

**مثال**: په یوه فابریکه کې د A، B او C درې ماشینونه په ترتیب سره 30% ، 30% او 40% برخه د برق ګروپونه تولیدوي. که چېرې په ماشینونو کې د ګروپونو د خرابېدو کچه په ترتیب سره 4%، 2% او 5% وي او نوموړي ګروپونه په ګډه سره خرڅ شي، مطلوب دي:

a) ددې احتمال چې یو اخېستل شوی ګروپ وران یا خراب وي.

b) په کوم احتمال خراب خرخ شوی گروپ د $C$ ماشین پورې اړه لري.

c) یو نوی تولید شوی گروپ لرو، په کوم احتمال سره به د B په ماشین پورې مربوط وي.




**د b جز:**

$$P_D(C) = \frac{P(D \cap C)}{P(D)} = \frac{P(C) \cdot P_C(D)}{P(D)} = \frac{0.4 \cdot 0.05}{0.038} = \frac{0.02}{0.038} = 0.526 = 52.6\%$$

**د c جز:**

$$P_{\overline{D}}(B) = \frac{P(\overline{D} \cap B)}{P(\overline{D})} = \frac{P(B) \cdot P_B(\overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{0.3 \cdot 0.98}{0.3 \cdot 0.96 + 0.3 \cdot 0.98 + 0.4 \cdot 0.95}$$

$$= \frac{0.294}{0.288 + 0.294 + 0.38} = \frac{0.294}{0.962} = 0.3056 = 30.56\%$$



**پوښتنې**

1- د 1000 دانو رملونو په منځ کې د یوې دانې په شپږ واړه مخونه یوازې د 6 شمېره وهل شوې ده. د هغوی له منځ څخه یوه ناڅاپه د رمل دانه ټاکل شوې او درې ځلې اچول شوې ده. درې ځلې 6 راغلې. پیدا کړئ، هغه احتمال چې په ټاکل شوې دانه په سم ډول شمېرې وهل شوې وي؟

## د ناخاپه پېښو استقلالیت

لـه مـشروط احتمـال څخـه پـوهیږو چـې د A او B دوو ناخاپو پېښو یا حادثو د B د پېښې پېښدل د A په پېښه تـاثیر اچـوي پـه دي سـبب لازمـه ده چـې د احتمـال د محاسبې په وخت کې د A او B پېښه په پام کې ونیسو.

$$P(A\bigcap B)=P(A)\cdot P(B)$$

د هغه حالت لپاره چې د A ناخاپه پېښې پېښدل پر B ناخاپه پېښې اغېزه ونه لري او بر عکس.

د A او B د ضرب د حاصل احتمال د $A\bigcap B$ پېښې له احتمال سره څه اړیکه لري.

**تعریف**: د A او B دوې ناخاپه پېښې چې یوه پر بله اغیزه لرونکې نه وي د ناخاپه مستقلو پېښو په نامه یادیږي.

$P(A\bigcap B)=P(A)\cdot P(B)$



### فعالیت

- د S نمونه یي فضا او د A او B دوې یوه له بلې څخه مستقلې پېښې چې د S نمونه یي فضاکې شامل وي، په پام کې ونیسئ.
- د مشروط احتمـال فورمول څخه په هغه صورت کې چې A او B یوه له بلې څخه مستقلې دوې پېـښې وي د $P(A)$ او $P_B(A)$ احتمـالونه یو له بل څخه څه توپیر لري؟
- د $P(A\bigcap B)$ ناخاپه پېښې احتمـال له څه سره مساوي دي؟
- د $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)$ د پېښو د احتمال له فورمول څخـه پـه هغـه صـورت کې چې A او B ګډ ټکی ونه لري، څه پایله اخلئ؟

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې پایله په لاس راځي:

1: د A او B دوې پېښې مستقلې بلل کېږي، که چېرې:

$P(A\bigcap B)=P(A)\cdot P(B)$ (د ضرب د حاصل اصل)

2: که چېرې A او B پېښې د ګډو ټکو لرونکې نه وي، نو

$$A\bigcap B=\emptyset\Rightarrow P(A\bigcap B)=0$$

$\Rightarrow P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)$ (د جمع د حاصل اصل)

**لومړی مثال**: که چېرې د یوه ښوونځي د زده کوونکو د سترګو رنګ او ذکاوت یـو پـر بـل پرتـه لـه اغېـزې فـرض شوي وي. د لاندې پېښو په پام کې نیولو سره په ناخاپه ډول د یوه زده کوونکي ټاکلو لپاره:

H: ټاکل شوي تن یو هوښیار ذکي زده کوونکی وي.

B: ټاکل شوي زده کوونکی تورې سترګې ولري.

هغه احتمـال پیدا کړئ چې ټاکل شوي زده کوونکی په ناخاپه توګه هوښیار ذکي او توري سترګې ولري.

**حل**: ددې لپاره چې ټاکل شوي زده کوونکی هوښیار او توري سترګې ولري لیکلای شو:

څرنګه چې $P_B(H)=P(H)$ سربېره پردې $P_B(H)=\dfrac{P(B\cap H)}{P(B)}$ نو:

$P(B\cap H)=P(H)\cdot P(B)$

**عمومي حالت**: د $A_1$ , $A_2$ , ..... $A_n$ , $(n\geq 2)$ ناڅاپه پېښې احتمالاً یو له بلې څخه مستقلې بلل کېږي که چېرې د هرو دوو یا څو پېښو په ترکیب کې د ضرب د حاصل قاعده صدق وکړي پرته له هغې پېښې احتمالاً یوه له بلې سره تړلې نومول کېږي.

**پایله**:

**1**: پاملرنه باید وشي چې د ضرب د حاصل له قاعدې څخه په ګټه اخیستنې سره په لاندې متقاطع جدول کې هم کولای شو چې $A\cap B$ , $A\cap\overline{B}$ , $\overline{A}\cap\overline{B}$ او $\overline{B}\cap A$ ناڅاپه پېښو احتمالي پایلې د A اوB پېښو لپاره چې احتمالونه یې a او b وي، په آسانی په لاس راوړو. د A او B د مستقل والي څخه پوهېږو چې د A او $\overline{B}$ ، $\overline{A}$ اوB په پای کې $\overline{A}$ او $\overline{B}$ هم یوه له بلې څخه مستقلې دي، نو لرو:

| | $B$ | $\overline{B}$ | |
|---|---|---|---|
| $A$ | $P(A\cap B)=a\cdot b$ | $P(A\cap\overline{B})=a(1-b)$ | $a$ |
| $\overline{A}$ | $P(\overline{A}\cap B)=b(1-a)$ | $P(\overline{A}\cap\overline{B})=(1-a)(1-b)$ | $1-a$ |
| | $b$ | $1-b$ | $1$ |

**2**: د A ، B او C درې ناڅاپه پېښې چې یوه له بلې څخه مستقلې دي، لرو:

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

$P(A\cap C)=P(A)\cdot P(C)$

$P(B\cap C)=P(B)\cdot P(C)$

$P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$

**دویم مثال**: په یوه کڅوړه کې دوې سپینې او دوې تورې مرۍ پرتې دي. دوې مرۍ یوه په بلې پسې له کڅوړې څخه پورته کوو، په داسې حال کې چې:

a- د لومړۍ مرۍ د پورته کولو نه وروسته هغه بېرته په کڅوړه کې ږدو.

b- پرته له دې چې مرۍ واپس کېښودل شي.

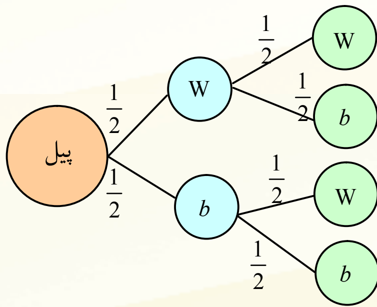
د A پېښه: په لومړي ځل سپینه مرۍ راووزي. B: دویم ځل مرۍ سپینه وي.

له یوې بلې څخه مستقلې یا تړلې (وابسته) دي.

**حل**:

a) څرنګه چې $P(A)=\dfrac{1}{2}$ او $P(B)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$ وي او

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=\dfrac{1}{4}$ دي، نو A او B یوه له بلې څخه مستقلې دي.

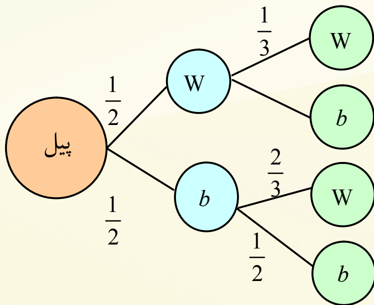



b) خرنگه چې:

$$P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\ ,\ P(A)=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)$$

نو A او B يوه له بلې څخه تړلې يا وابسته دي.




**دريم مثال**: د لاندې متقاطع جدول خالي ځايونه چې په نښه شوي دي، ډک يې کړئ:

| | $B$ | $\overline{B}$ | |
|---|---|---|---|
| $A$ | 0.12 | $P(A\cap\overline{B})=?$ | ? |
| $\overline{A}$ | $P(\overline{A}\cap B)=?$ | $P(\overline{A}\cap\overline{B})=?$ | ? |
| | ? | 0.6 | |

**حل**: خرنگه چې $P(\overline{B})=0.6$ دي، نو لرو:

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-0.6=0.4$$

$$P(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.12}{0.4}=0.30$$

$$\Rightarrow P(\overline{A})=1-P(A)=1-0.3=0.70$$

او د پېښو د تقاطع څخه لرو چې:

$$P(A\cap\overline{B})=P(A)\cdot P(\overline{B})=0.3\cdot 0.6=0.18$$

$$P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})\cdot P(B)=0.7\cdot 0.4=0.28$$

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})=0.7\cdot 0.6=0.42$$

په همدې ترتيب په جدول کې د قيمتونو په وضع کولو سره مسئله تکميلېږي.



## پوښتنې

یو سټ چې عناصر يې 5,3,2 او 30 دی د یوه رقم د انتخاب احتمال يې 0.25 دی په ناڅاپي ډول لـه نوموړی سټ څخه یو رقم انتخابوو، که چېرې $A_k$ ناڅاپه پېښه د هغه رقـم چـې انتخـاب شـوی او د تقسـیم قابلیـت پـه $k$ ولري، آیا $A_2$ ,$A_3$ او $A_5$ ناڅاپي پېښې دوه په دوه مستقل دي او که نه؟

## د څپرکي مهم ټکي

### بېلې شوې(غیرمتمادي) نمونه يي فضا:

هغه نمونه يي فضا چې عناصر يې د شمېر او تشخیص وړ وي، د غیرمتمادی نمونهیي فـضا پـه نامـه یـادېږي، لکـه د رمل یا د سکې اچولو تجربې نمونهیي فضا.

### نښتي(متمادي) نمونه يي فضا:

هغه نمونه يي فضا چې عناصر يې د شمېر وړ نه وي د پیوسته یا متمادي نمونهيې فضا په نامه یـادېږي چـې د حقیقـي عددونو پر محور د فاصلې په بڼه او یا په فضاکې د هندسي شکلونو یا حجمونو په ډول څرګندېږي.

### هم چانس پېښې:

د یوې نمونه يي فضا لومړني پېښې چې د هغوی پېښې د تجربې په پای کې پـه برابـر احتمــال پېـښېږي، هـم چانسه پېښې بلل کېږي. د هم چانس پېښو د احتمـال مجموع له یوه سره مساوي ده.

### د نښتي(پیوسته) فضا احتمـال:

د ټوټه کرښو، سطحو او حجمونو مساعد حالتونه د یوې پام وړ ناڅاپي پېښې لپاره په یـوه تجربـي نمونـهيي فـضاکې شامل ټوټه کرښو، سطحو او حجمونه عبارت دي د متصلې فضا له احتمال څخه.

### مشروط احتمـال:

کـه چېـرې A او B د S، د نمونـهيـي فـضا دوې ناڅاپـه پېـښې چـې $P(B)\neq 0$ وي پـه دې حالـت کـې $P_B(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ ته د A ناڅاپه پېښې د مشروط احتمـال په نامـه یـادېږي پـه دې شـرط چې د B پېښه لـه مخکې پېښه شوې وي.

### یوه له بلې څخه مستقلې پېښې:

د A او B دوه ناڅاپه پېښې یوه له بلې څخه مستقلې بلل کېږي که چېرې:

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$ (د ضرب د حاصل اصل)

## د څپرکي پوښتنې

1. د لاندې نمونه يي فضاګانو څخه کومه يوه سره نښتې يا پيوسته او کومه يوه غيرمتمادي ده؟

الف: د يوې رمل دانې اچولو تجربه

ب: د يوې سکې د اچولو تجربه

ج: د يو غشي لګېدل په يوه دايره

د: د يوې فلزي ميلې د اوږدوالي زياتېدلو تجربه نظر حرارت ته

2. د يو چارتراش چې اوږدوالی يې $L$ دی په ناڅاپه ډول په سور اره کوو، تر څو دوه برخې شي څومره احتمال شته چې د کين اړخ اره شوې برخه د ښي اړخ له درې برابره څخه کوچنۍ وي.

3. د يوه خصوصي شرکت يو کارګر هره ورځ د 8 او 8:50 ساعتونو په منځ کې کورته نژدې تم ځای کې چې د مامورينو په موټر کې کارته د تګ لپاره ګډون وکړي او په 8:15 ، 8:30 او 8:45 وختونو تم ځای ته رسېږي څومره احتمال ددې شته چې نوموړی تن له 5 دقيقو څخه لږ منتظر پاتې شي.

4. د $[0.3]$ تړلي فاصلې څخه په ناڅاپه ډول دوه عددونه ټاکو، ددې احتمال پيدا کړئ چې د عددونو مجموعه د 5 څخه کوچنۍ او له 2 څخه لويه وي.

5. په ناڅاپه ډول يو ټکی د مخروط دننه چې د قاعدې شعاع يې $R$ او جګوالی $R\sqrt{3}$ دی ټاکو، پيدا کړئ ددې احتمال چې ټکی د محاطي کرې دننه په دې مخروط کې قرار لري.

6. د يو خودکار قلم خرابېدل دوه دليلونه لري:

1- د ميخانيکيت خرابېدل

2- د خودکار د نيچې خرابېدل

که چېرې د يو خودکار قلم د خرابېدو احتمال 0.088 او ددې احتمال چې د خرابېدو دليل (1)، شمېره وي مساوي په 0.05 او د دويم نقص احتمال مساوي په 0.002 وي وڅېړئ: چې دوه پورتني دلايل مستقلې او يا غير مستقلې پېښې دي؟

7. خيبر غواړي هغه څلور کلي‌ګانې چې په جيب کې يې لري او سره يو شان دي د کورد دروازې قلف خلاص کړي په کوم احتمال سره وروسته د دريمې کلي له آزمويلو سره چې له جيب څخه يې را باسي د قلف اړوند کلي وي، په هغه صورت کې چې:

a) هره آزمويل شوې کلي په هغه صورت کې چې اصلي کلي نه وي دوباره په همغه جيب کې اچوي.

b) هره آزمويل شوې کلي په هغه صورت کې چې اصلي کلي نه وي په بل جيب کې اچوي.